# INITIA
# GEOMETRIAE SYMBOLICAE

IN

USUM SCHOLARUM

SCRIPSIT

DR. ANDREAS JACOBI,

ADJUNCTUS PORTENSIS.

CUM IV TABULIS.

HALIS SAXONUM,

APUD C. A. SCHWETSCHKE ET FILIUM.

1832.

Etsi permagni est faciendum Cartesii 1) inventum illud, quo primus algebrae usum in geometriam introduxit, justisque laudibus nomen ejus celebratur, tamen pluris faciendam esse eam rationem 2), cujus auctores sunt La Grange 3), Lacroix 4) et maxime Monge 5), quaeque nunc vulgo geometria analytica 6) appellatur, dubium

---

1) Descartes, Traitè de la géométrie. Par. 1964.

2) Quomodo Cartesii et Mongii methodi inter se differant, bene docuit vir clarissimus et doctissimus Carolus Ditericus de Muenchow in praefatione, Hamiltonis sectionibus conicis ex editione Feldhoffii praefixa.

3) Solutions analytiques de quelques problemes sur les pyramides triangulaires. Reperitur haec La Grangii tractatio in libro *„Nouveaux mémoires de l'academie royale etc. année MDCCLXXIII.*

4) Traité du calcul differentiel et du calcul intégral. Paris, 1797. C. IV.

5) Géométrie descriptive. Paris, 1795? Ceterum Mongius jam prius eandem rem in singulis commentationibus nobis ignotis tractasse videtur.

6) Quum analytica geometriae tractatio opponatur syntheticae, in ipsa vero synthetica tractatione nos duplex demonstrationum genus distinguamus, alterum syntheticarum, alterum analyticarum, per se patet, nos haud accurate loqui, si eam, quam Monge invenit, geometriae tractationem, geometriam analyticam vocemus. Vitiosus hic loquendi usus, a pluribus rerum mathematicarum gnaris vituperatus, cur non jam diu sit abrogatus et cum alio meliori mutatus vix intelligitur. Mongii inventum accurate significabimus, si ea utemur ratione, quam de Muenchow l. l. proposuit. Ex hujus viri enim sententia quaecunque ad geometriam analyticam pertinent, rectius diceris „geometriam symbolorum usu tractatam." Itaque quum haec ratio geometriam analyticam significandi non solum recta, sed quavis alia sit

*

potest esse nemini, qui secum reputavit, quam laeta inde incrementa cum geometria, tum mechanice et astronomia ceperit. Nihilo tamen secius tum quum primum prolata est, ii qui matheseos scientiam profitebantur, non omnes hanc sententiam amplexi sunt. Quamquam nemo eorum fuit, cui non mox singula se commoda offerrent, quibus haec methodus illi, quam syntheticam vocant, praestaret: commendari demonstrationes hac ratione confectas brevitate, elegantia et eo, quod latius paterent unaque plurium propositionum demonstrationes continerentur; ceterum non raro, quae in geometria maxime expetitur, simplicitatis laudem ad eas pertinere. Nec tamen haec omnia, etsi magna non poterant non videri et ab unoquoque concedebantur, tantum apud omnes valebant, ut nova methodo uti in animum inducerent. Non pauci enim iique non ignobiles reperiebantur mathematici, qui quum duo potissimum reprehendi in ea posse putarent, contemnendam censerent. Ac prius quidem vitium in eo ponebant, quod non omni propositioni demonstrandae idonea esset, alterum in difficultatibus cerni dicebant, quibus nimis magnis multarum propositionum demonstrationes, si essent symbolorum ope exhibendae, obstruerentur. At vero non defuerunt novae methodo vindices gravissimi, qui, quantum isti abessent a veritate, luculentis documentis demonstraverunt. Inter hos viros prae ceteris omnibus nominandus

accuratior at ad veram rei naturam declarandam accomodatior, hoc libello ea uti non dubitavi, ita quidem ut pro longiore significandi ratione „geometria symbolorum usu tractata" nunc symbolorum usus, nunc symbola simpliciter, nunc vero etiam geometria vel tractatio symbolica, etiamsi verbum symbolica apud scriptores antiquos vix reperiatur, dixerim.

est La Grange, qui re ipsa probavit, prioris illius maximi vitii injustissime geometriam symbolicam insimulari. Tractavit enim libello, quem inscripsit, Sur l'attraction des spheroides eliptiques [7], symbolorum ope propositionem, quam ut demonstraret, ante eum Maclaurin synthetica ratione eo majori jure usus esse putabatur, quod non modo ea methodo facilius demonstrari, sed et Mongii tractandi rationem plane excludere videbatur. At La Grange non posse solum propositionem symbolorum ope demonstrari, sed etiam ita posse, nihil ut eorum, quae in symbolorum usu laudarentur, ab hac demonstratione abesse, egregio exemplo declaravit. Hoc autem eam ob causam permagni est aestimandum, quia, quod vir ille doctus de hac una propositione docuit, id ad omnes propositiones pertinere nullamque omnino esse, neque quae inter faciliores, nec quae inter difficiliores referatur, in qua demonstranda symbolica ratio deficiat, ac multas carituras esse demonstratione, nisi symbola essemus nacti, jure nostro possumus affirmare.

Non verius est illud alterum, quod geometriae symbolicae obtrectatores exprobrabant, permultarum propositionum demonstrationes, si symbola adhiberentur, majoribus laborare difficultatibus. Namque etiam si de eo nulla est controversia, propositionibus, in quibus de metienda magnitudine linearum vel arearum agitur, non tam aptum esse symbolorum usum, quam iis, quae situm rectarum inter se mutuum earumque divisionem spectant, tamen illud concedi nequit, in hujus generis propositionibus, quas

7) v. librum jam ante laudatum „*Nouveaux mémoires*“ etc.

priori loco posuimus, demonstrandis si quis symbolis utatur, majoribus circumveniri difficultatibus, quam si alteram methodum in usum vocet. Unum, quod ingratum inesse in hac demonstrandi ratione dicas, hoc est, quod longior est eoque saepius non parvum exhibet laborem. Quanti est autem hoc vitium, si est vitium, aestimandum, si ceteras virtutes, quibus haec methodus praestat, ac potissimum brevitatem respicias, quacum, in plurimis demonstrationibus deprehensa, paucarum longinquitas praeclare compensatur? Itaque vix in dubium vocari posse videtur, geometriae tractationem symbolorum usu nitentem ei, quae e constructionibus propositionum demonstrationes petat, esse praeferendam [8].

Non ampliore autem disputatione in re certa opus esse existimamus, ut intelligatur, eum, qui in singulas matheseos partes penitus pernoscendas studium conferre velit, justa geometriae symbolicae cognitione supersedere non posse, quae si cui desset, nae is multis ac magnis utilitatibus in tractanda geometria careret nec haberet in multis propositionibus, quomodo earum demonstrationes institueret. De illo rectius potest ambigi, an discipuli geometriae symbolicae cognitione imbuendi sint et quando iis

8) Mollwelde in Kluegelii vocabulario mathematico sub voce „Synthesis" hac de re ita sentit. Das analytische Verfahren, inquit ille, ist durch seine Einfachheit und Gleichförmigkeit, so wie durch die Eleganz, die es in der Behandlung zulässt, gleich bewundernswerth; durch seine grofse Ausdehnung und Stärke aber verdient es den Vorzug vor dem synthetischen Verfahren der Alten. In eandem sententiam locuti sunt Brandes, Littrow et alii. Quo magis mirum est, etiam num hanc geometriam symbolicam non solum apud totos populos jacere, ut apud Anglos, sed etiam apud eos, quibus innotuerit, non ita esse pervulgatum, ut gravissimorum virorum laudibus effectum jure exspectaveris.

expediat, prima ejus elementa discere. Nos quidem in iis acquiescendum putamus, quae Carolus de Muenchow in libro, quem jam saepius laudavimus, hac de re protulit [9]. Qualem autem esse vir doctus eum vult, qui ad geometriae symbolicae studium accedere et possit et debeat, talis erit, opinor, is discipulus, qui cum esset inferiorum classium civis, diligenter et assidue mathesin tractavit, in superiorem autem erectus eodem amore hanc disciplinam amplectitur. Atqui symbolorum usus in earum rerum orbem, quae tradi in scholis solent, vix videtur posse recipi; itaque hoc unum relinquitur, ut e libris, qui de geometria symbolica conscripti sunt, disciplui ejus elementa addiscant. Editi autem sunt de symbolorum usu peculiares libri haud pauci numero, inter quorum auctores nominandi sunt **Biot** [10], **Brandes** [11],

---

9) Verba viri docti haec sunt: Um nicht in eine schädliche Einseitigkeit zu verfallen, stelle man sich zuförderst den gegenwärtigen Umfang und Reichthum der Wissenschaft recht lebhaft vor; man erwäge ferner, dafs ein grofser Theil dieses, in der Sprache der symbolisirenden Methode ausgeprägten, Reichthums auch auf dem Wege dieser Methode erworben worden, ja dafs ein Theil desselben entweder auf keinem andern Wege, oder doch wenigstens auf keinem andern mit gleicher Schnelligkeit erworben werden könne; und man wird sich mit mir leicht dahin vereinigen, dafs dem angehenden Mathematiker eine besondere Uebung in der construirenden Methode nur so lange zu empfehlen sei, bis seine Einbildungskraft eine zur Zusammenstellung geometrischer Formen hinreichende Leichtigkeit und sein Gedächtnifs diejenige Ausrüstung erlangt haben wird, die zum raschen Durchlesen, der nach dieser Methode geschriebenen Bücher erforderlich; dafs er aber daneben nicht versäumen dürfe, mit der symbolisirenden Methode *so bald als möglich eine gründliche Bekanntschaft zu machen* und nach und nach sich immer grössere Fertigkeit in derselben zu verschaffen: er müsste denn etwa in der Meinung stehen, zur Erlangung der Kenntniss der in der Wissenschaft vorhandenen ausgezeichnetsten Theorien immer noch Zeit genug übrig zu behalten, oder vielleicht gar gesonnen sein, auf den gröfsern Theil jener Kenntniss Vezicht zu leisten.

10) Versuch einer analytischen Geometrie etc. übersetzt von Ahrens. Nürnberg 1817.

11) Lehrbuch der höhern Geometrie. Leipzig 1822.

**Littrow**[12]), **Pluecker**[13]), **Moth**[14]). At nullus est eorum librorum, quem ita comparatum dicas, ut discipuli ex eo geometriae symbolicae naturam et usum pernoscere possint. Nam quamquam Bioti liber, id quod ex praefatione intelligitur, in scholarum usum est compositus, tamen non omnino absunt difficultates, quae in ceteris offenduntur, quaeque, cur minus eo discipuli elementa geometriae symbolicae cognituri uti possint, in causa sunt. Eae difficultates autem, quibus laborare cum omnes illos libros, tum aliqua ex parte Bioti librum, si usus eorum in scholis respiciatur, diximus, potissimum his in rebus conspiciuntur. Nam primum quidem hoc tironibus difficultates exhibet, quod aequationes, cum fundamentum totius geometriae symbolicae constituant, tamen nimis breviter tractatae sunt, et quod, cui rei maxime erat attendendum, non pluribus ex positum est, quomodo illae aequationes oriantur et cur haec illave aequatio symbolum esse hujus illiusve quantitatis geometricae possit, et, ut exemplo rem declaremus, quomodo aequatio $y = ax + b$ symbolum fieri lineae rectae i. e. quomodo hac aequatione linea recta significari queat. Inde fit, ut it, qui harum rerum plane ignarus ad illos libros accedit, symbolorum naturam non intelligat et multo minus usum eorum perspiciat deterreaturque a re ipsa, quam, quum lusus potius signorum videatur, quam doctrina,

---

12) Analytische Geometrie. Wien 1823.

13) Analytisch-geometrische Entwickelungen. Essen, erster Band 1828, zweiter Band 1831.

14) System der analytischen Geometrie. Prag 1830.

cujus certus finis sit certaque ratio, nihil afferre putat, unde aliquis ad se fructus redundet.

Alterum deinde, quod tironibus inpedimento est, quominus ex illis libris geometriam symbolicam pernoscere possint in eo cernitur, quod prima et simplicissima symbola parum sunt usurpata ad eas propositiones geometricas demonstrandas, quae planae et ei etiam, qui vel leviter mathematica degustavit, notae sunt. Id quantum ad obstruendum potius, quam ad patefaciendum hujus methodi aditum valeat, in promptu est. Nam et propositionum natura et nova eas demonstrandi ratio difficultates excitant, ad quas superandas vel plus temporis, quam quod discipulis ad comparandam geometriae symbolicae cognitionem, quam privato studio adquirendam diximus, concedi potest, vel ea rerum mathematicarum peritia requiritur, quae in discipulis, etiam si non invita Minerva litteras tractent, vix reperiatur.

Itaque cum persuasum mihi haberem symbolorum scientiam, qua nova geometriae tractandae ratio addiscitur, cum omnibus discipulis ad acuenda et excolenda ingenia fore utilissimam, tum iis, qui in posterum totos se matheseos studio addicturi sunt, saluberrimam ac prope dixerim necessariam; sed cum idem intelligerem, eos quoque libros, quos Biot et Pluecker de geometria symbolica ediderunt, quamquam multis magnisque virtutibus ornatos, huic, quem nos spectamus, usui parum inservire: operae pretium facturum me esse putavi, si oblata scribendi opportunitate ita uterer, ut libellum conficerem, quo, difficultatibus, quibus illi libri laborant, si non omnino sublatis, at certe leva-

tis, initia geometriae symbolicae ita traderentur, ut discipuli justa elementorum matheseos cognitione instructi intelligentiam non excederent [15]).

15) Hoc loco monere mihi liceat, quae in duobus aliis hujus libelli locis mihi erant monenda. Neque enim de natura signorum + et — (§. 5.), neque de ratione aream figurae alicujus exhibendi ope coordinatarum, quae ad figurae angulos pertinent, (§. 32.) satis accurate exposui, propterea quod timebam, ne essem nimis longus. Utramque rem optime docuit de Muenchow in trigonometria sua, libro omnibus laudibus digno, qui in lucem prodiit Bonnae a. MDCCCXXVI.

# Caput I.

## De symbolorum, quae lineam rectam respiciunt, natura.

§. 1.

Si in plano quodam datae sunt duae rectae non parallelae simulque punctum aliquod, in eodem plano positum, nemo non intelligit, hujus puncti situm, si in plano mutetur, simul mutari ad datas rectas, h. e. si punctum illud a dato plani loco ad ~~alium movetur~~, idem simul ab alterutra certe recta recedat, vel ad alterutram propius accedat esse necesse. Sint e. g. (fig. 1.) datae rectae $OX$, $OY$, punctum datum $A$. Idem punctum $A$ si e loco, in quo positum est, movetur ad illum, quem tenet $B$, simul non ab altera solum rectarum $OX$, $OY$, sed ab utraque recedit. Proprietas vero, quae in eo cernitur, quod situs puncti in plano pendet a situ, quem punctum habet ad datas rectas, ita exprimitur, situm puncti in plano esse functionem *) situs, quem idem punctum habeat ad datas rectas.

§. 2.

Ex antecedentibus jam sequitur, quod punctum certum habeat situm in plano, idem certum habere situm ad datas rectas, et vice versa, si certus

*) Duarum quantitatum altera nominatur functio alterius, si altera ab altera ita pendet, ut altera ex altera inveniri possit.

sit puncti situs ad datas rectas, ejus situm in plano incertum esse non posse. Itaque punctorum situs in plano recte ita definiri potest, ut eorum situs ad duas rectas non parallelas, in eodem plano datas, definiatur. Situs vero puncti ad duas ejusmodi rectas nobis est notus, si magnitudinem linearum vel perpendicularium, vel datis parallelarum, e puncto ipso ad utramque lineam ductarum, cognitam habemus. In geometria symbolica semper usurpantur ad inveniendum puncti situm lineae, quae utrique datae rectae sunt parallelae.

§. 3.

Duae rectae, quibus utimur ad inveniendum puncti alicujus situm, quales sunt (Fig. 1.) $OX$ et $OY$, nominantur *coordinatarum axes*, earumque altera $OX$ *axis primus*, altera $OY$ *axis secundus* dicitur. Lineae, quae a dato puncto ad utrumque coordinatarum axem ducuntur axibus ipsis parallelae et quarum e magnitudine ipsius puncti situs cognoscitur, nominantur *coordinatae*. Si (Fig. 1.) $AC \parallel OY$, $AD \parallel OX$; $BE \parallel OY$, $BF \parallel OX$; coordinatae puncti $A$ sunt $AD$ et $AC$, puncti $B$, $BF$ et $BE$; $AD$ et $BF$, quarum magnitudo per $OC$ et $OE$, quae sunt partes primi coordinatarum axis, data est, dicuntur proprio nomine *abscissae* et plerumque significantur littera $x$; $AC$ et $BE$ vero, quae aequales sunt partibus secundi axis $OD$ et $OF$, dicuntur *ordinatae* et significantur per $y$. Inde factum est, ut axis primus $OX$ etiam nominaretur *abscissarum axis*, axis secundus vero $OY$ nomen acciperet *ordinatarum axis*. Punctum $O$, in quo coordinatarum axes sese secant, dicitur *initium coordinatarum*. Angulus $YOX$ est *angulus coordinatarum*.

§. 4.

Jam ex iis, quae in antecedentibus dicta sunt, apparet, quomodo quodque punctum, quod intra coordinatarum anguli crura positum sit, e datis ejus coordinatis inveniri possit. Sit nobis data abscissa puncti $A = AD$ et ejus ordinata $= AC$, situm puncti $A$ satis facile definire possumus. Desecamus enim in abscissarum axe ab initio coordinatarum $O$ partem $OC = AD =$ datae

puncti abscissae; in ordinatarum vero axe $OY$ partem $OD = AC =$ datae puncti ordinatae; per puncta $C$ et $D$, quae ita invenimus, rectas $CA$ et $AD$ ducimus coordinatarum axibus parallelas, habemusque punctum $A$, ubi $CA$ et $AD$ sibi incidunt. Sicuti situm puncti $A$ definivimus, ita et situm puncti $B$ et cujusvis alius, simili modo siti, e datis coordinatis definire possumus.

## §. 5.

Jam transeamus ad constituendum situm punctorum, quae non intra crura coordinatarum anguli posita sunt.

Si (Fig. 1.) lineas $OX$ et $OY$ producimus supra punctum $O$, ita ut habeamus $OX'$ et $OY'$, facile situm punctorum $G$, $H$, $K$, ex eorum coordinatis definire possemus, si ad definiendum primi puncti $G$ situm ponere nobis liceret, $OX'$ et $OY$, ad secundi puncti $H$, $OX'$ et $OY'$, ad tertii denique $K$, $OX$ et $OY'$ coordinatarum esse axes. Atque his conditionibus coordinatae punctorum situ plane diversorum semper essent quantitates positivae. Huic vero commodo renuntiare debemus, ut aliud multo majus consequamur, illud dicimus, ut situm punctorum $G$, $H$, $K$ ex iisdem coordinatarum axibus definire possimus, ex quibus situm puncti $A$ jam definivimus. Situs punctorum $A$, $G$, $H$, $K$ ex iisdem coordinatarum axibus definiri potest, si in usum vocamus signa positivi et negativi; nam vera horum signorum natura eorumque in geometria usus in eo cernitur, quod eorum ope variae, quae esse possunt, proprositionum geometricarum formae ad unam revocantur.

In geometria, ut constat, signa positivi et negativi adhibentur ad significandas lineas, quae ab uno eodemque puncto directionibus plane oppositis procedunt. Ejusmodi lineae sunt (Fig. 1.) $OX$ et $OX'$, $OY$ et $OY'$, i. e. axes ipsi et axes producti. Profecto nihil interest, num lineis $OX$ et $OY$ demus signum $+$, $OX'$ et $OY'$ vero signum $-$, an vice versa. Quia vero significavimus coordinatas puncti $A$ per $OC$, $OD$ vel $+OC$, $+OD$, quae directiones habent a puncto $O$ ad puncta $X$ et $Y$ procedentes, omnes lineae signum $+$

habeant necesse est, quibus alterutra illarum est directionum; contra habebunt signum — lineae eae, quarum directiones a puncto $O$ ad puncta $X'$ et $Y'$ procedunt. Ex his sequitur, coordinatas puncti $G$ esse $ON$ et $-OM$; puncti $H$, $-OP$ et $-OS$; puncti $K$, $-OR$ et $OQ$. Videmus igitur coordinatas punctorum, intra $OX$ et $OY$ sitorum, esse positivas, punctorum vero coordinatas, intra $OX'$ et $OY'$ jacentium, esse negativas; deinde puncta, quae inter $OX'$ et $OY'$ jaceant, positivam habere ordinatam et negativam abscissam, punctis autem, inter $OX$ et $OY'$ positis, esse negativam ordinatam et positivam abscissam. Itaque e diversis coordinatarum signis facile cognoscimus, in quonam horum angulorum, $YOX$, $YOX'$, $Y'OX'$, $Y'OX$ punctum quoddam sit positum. Ad signorum igitur, quae in coordinatis conspiciuntur, cognitionem si accedit notitia magnitudinis coordinatarum, situs cujuslibet puncti definiri potest, quod intra crura unius ex illis angulis positum est. Quum vero omnia plani puncta, in quo datae sunt rectae $OX$ et $OY$, in uno horum angulorum jaceant necesse sit, jure dicere licet, e coordinatis, quae in axibus vel ipsis, vel productis datae sint, h. e. *e coordinatarum magnitudine et signis situm cujusvis puncti in plano quodam definiri posse.*

§. 6.

Ex iis, quae in antecedentibus de punctis eodem loco fixis eorumque situ definiendo diximus, jam perspicitur, etiam *motum punctorum* coordinatarum ope definiri posse. Puncti enim motus in perpetua situs mutatione cernitur; vidimus autem, quamque mutationem, quae ad situm puncti in plano pertineat, coordinatarum ope exprimi posse; ergo mutatio situs puncti sive ejus motus in plano recte dicitur functio mutationis situs ad coordinatarum axes. Quod quidem maximi est momenti, si ponimus, motum puncti fieri certa lege. Punctum enim si certa lege movetur, viam percurrit, quae certa linea significatur. Quum autem coordinatarum ope motus puncti definiri possit, earundem usu legem, qua fit motus, et hoc modo lineam ipsam, quae hac lege descripta est, indagare nobis licebit. Quae quidem res quum magnam vim habeat, paulo accuratius consideranda est.

§. 7.

Si punctum movetur, deinceps singula plani loca transit. Diversis vero locis diversae sunt coordinatae, h. e. coordinatae locorum deinceps sequentium crescunt vel decrescunt. Punctum igitur si certa lege movetur, singula loca transeat necesse est, quorum coordinatae eadem lege crescunt vel decrescunt. Cognitam ergo habemus ipsius motus legem, si cognovimus, quomodo singulorum locorum, quae punctum transit, coordinatae crescant vel decrescant. Singula loca, de quibus agitur, sunt, quod satis liquet, singula lineae, quae puncti motu describitur, puncta; linea ipsa vero legem, qua fit motus, nobis exhibet. Inde igitur luculenter apparet, lineae naturam indagari, si indagemus naturam coordinatarum, quae ad singula lineae puncta pertineant. Coordinatarum vero natura cognoscitur e ratione, quam singulorum lineae punctorum abscissae ad eorundem punctorum ordinatas habent, vel ut alio modo rem exprimamus, natura coordinatarum cognita est, si congnovimus quomodo abscissarum crescendi vel decrescendi facultas pendeat a crescendi vel decrescendi facultate ordinatarum. Itaque si aequatio confici possit, in qua altera coordinatarum cujuslibet ~~puncti lineae functio~~ sit alterius, haec ipsa aequatio recte dicatur lineae ipsius symbolum, i. e. hac aequatione ad contemplandam lineae naturam ita uti liceat, ut quaecunque singulis lineis propria sint ejus ope invetigemus.

§. 8.

Simplicissima lex, qua fit puncti motus, haud dubie conspicitur in linea recta, cujus contemplationem atque tractationem jam aggrediamur.

Jam exponendum est, aequationem confici posse, quae sit lineae rectae symbolum.

Primum monendum est, in conficienda lineae rectae aequatione minime respici lineae magnitudinem; propter quod omnes lineae eadem magnitudine esse cogitari possunt et hanc ob causam magnitudo ad efficiendam aequationem nihil valet. Jam si linearum magnitudinem non spectamus,

omnes lineae situ tantum diversae sunt. Ut igitur aequatio lineas omnes exhibeat, ea ita nobis conficienda erit, ut ejus ope cujusque lineae situs definiri possit.

§. 9.

Lineae rectae situs nobis plane notus est, si duo puncta habemus cognita, in quibus lineas duas alias nobis datas secat. Sufficiunt igitur ad definiendum lineae situm dua puncta, in quibus ea coordinatarum axes secat.

Ponamus igitur datam esse rectam (fig. 2.) $AB$ et nos cognita habere puncta, in quibus coordinatarum axes secet, ita ut sit $OC = b$, $OD = -c$; deinde alicujus puncti $E$ coordinatas esse $x$ et $y$, h. e. $OF = x$, $OG = y$, habebimus *secundam naturam lineae rectae* hanc proportionem

$$-c : b = x - c : y,$$

atque ex hac proportione derivatur aequatio

$$b(x-c) = -cy$$

$$y = \frac{b(x-c)}{-c} = \frac{bx}{-c} + b.$$

Ponamus $\frac{b}{-c} = a$; erit aequatio

$$y = ax + b.$$

Quae quidem aequatio quia e proportione, quae indicat, $AB$ esse lineam rectam, ita derivata est, ut non nisi forma a proportione discrepet, ex ipsa etiam aequatione cognosci poterit, eam significare lineam rectam. Aequatio enim e tali proportione, qualis est

$$-c : b = x - c : y,$$

derivata, semper ita comparata esse debet, ut prima tantum coordinatarum potentia in ea reperiatur, atque haec aequationis proprietas indicat, aequationem significare lineam rectam. Deinde quia coordinatarum alteram in aequatione nostra functionem alterius esse videmus, ad datam cujuslibet puncti abscissam aequationis ope inveniri posse ejusdem puncti ordinatam efficitur.

Quum igitur hac aequatione coordinatae omnium rectae punctorum inveniri possint, ac simul cum coordinatis punctorum inveniatur eorum situs, eadem aequatione situm ipsius rectae definiri posse satis intelligitur, cum situs duorum punctorum jam sufficiat ad situm rectae definiendum. Itaque hanc aequationem

$$y = a\,x + b$$

recte dicimus symbolum lineäe rectae.

§. 10.

Jam de natura quantitatum videamus, quae in aequatione nostra reperiantur. Primum animadvertendum est, $x$ et $y$ non nominari quantitates ignotas, ut plerumque in aequationibus fieri solet, sed quantitates variabiles, propterea quod fieri potest, ut $x$ et $y$ in eadem linea usque ad $\infty$ crescant et usque ad $-\infty$ decrescant. Propter varium igitur valorem, quem $x$ et $y$ in eadem aequatione habere possunt, quantitates dicuntur variabiles. Deinde bene notandum est, quantitates $a$ et $b$ non significare quantitates notas, sed constantes, i. e. quantitates, quae in eadem linea non variabilis sint valoris, sed semper unum idemque valeant. In nostra quidem aequatione $a$ et $b$ sunt quantitates notae; sed hujus rei causa in eo cernitur, quod aequationem ita confecimus, ut significaret lineam rectam, quae *certum situm* habeat. Sed quaeret fortasse quispiam, an ad significandam lineam rectam, cujus situs sit incertus, hac aequatione uti non liceat? Haud dubie uti licet. Si consideramus, quid $b$ significet et quid $a$, videmus $b$ esse lineam, quam nostra data linea in ordinatarum axe desecet, $a$ vero, quod posuimus $= \frac{b}{-c}$, esse $= \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, ubi $\alpha$ angulus est, quem linea nostra cum abscissarum axe efficit, $\beta$ vero coordinatarum angulus. Inde elucet, quantitates $a$ et $b$ ita esse comparatas, ut in quaque linea recta reperiantur, ibique certum habeant valorem. Itaque $a$ et $b$ in cujuslibet rectae aequationem, seu nobis sint quantitates cognitae, seu incognitae, jure recipiuntur, vel quod idem est, quaevis recta illa aequatione

$$y = a\,x + b$$

significari potest.

Addere hoc loco liceat, $a$ esse tangentem trigonometricam anguli $\alpha$, si coordinatarum angulus $\beta = R$. Nam habemus $a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin (1R - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tang } \alpha$.

§. 11.

Ex iis, quae de quantitatibus et variabilibus, et constantibus nostrae aequationis dicta sunt, facile perspicitur, aequationes, quibus duas lineas diversas significare velimus, has habere formas

$$y = a\,x + b$$
$$y = a'\,x + b'.$$

Quum enim tam diu recte ponatur, $y$ et $x$ in quaque recta quemvis habere valorem, quam diu hoc fieri non posse e constantium ratione non intellexerimus, in quaque lineae rectae aequatione, cujus constantes nobis incognitae sunt, variabiles $x$ et $y$ eodem modo significantur; at constantes, quia in diversis lineis plane sunt diversae, eodem modo significare neutiquam licet.

§. 12.

Postquam in antecedentibus de natura aequationis rectae lineae satis copiose expositum est, jam ad derivationem aliarum aequationum transeamus.

Jam antea obiter monuimus, aequationem

$$y = a\,x + b$$

significare lineam rectam, quae certum habeat situm, si constantes $a$ et $b$ notae sint quantitates. His adjiciendum est, si altera tantum quantitatum constantium cognita sit, aequationem nobis exhibere lineam, cujus situs aliqua ex parte sit certus, id est lineam, quae transeat certum punctum. Itaque facile e nostra aequatione aliae derivari possunt, quae lineas significent, quae vel unum, vel duo certa puncta transeant, si vel pro alterutra, vel pro utraque constante incerta quantitates certas in aequationem introducimus.

### §. 13.

Jam ponamus $b$ habere certum valorem, esse $= o$, nostra aequatio mutabitur in hanc

$$y = ax$$

Haec recta certum punctum transeat necesse est; hoc quod sit ex sequentibus apparebit. Jam in memoriam revocemus, $b$ significare eam partem ordinatarum axis, quam recta, cujus aequatio

$$y = ax + b$$

in eodem axe desecat. Haec vero pars ordinatarum axis erit $= o$, si linea

$$y = ax + b$$

initium coordinatarum transit. Ergo aequatio

$$y = ax$$

significat rectam, quae initium coordinatarum transit, et ubicunque aequatio hujus formae deprehenditur, recte concludimus, lineam, quam aequatio significet, transire initium coordinatarum.

### §. 14.

Quia $a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, ~~erit $a = o$,~~ si *sin* $\alpha = \alpha = o$, i. e. si linea $y = ax$ parallela est $OX$. Si igitur ponimus in aequatione

$$y = ax$$

fieri $a = o$, aequatio in hanc mutatur

$$y = o$$

Haec aequatio significat rectam, quae transit punctum $O$, eademque parallela est abscissarum axi; quae quidem recta nulla alia esse potest, quam ipse abscissarum axis.

Ponamus $\alpha = \beta$, hoc est lineam

$$y = ax$$

esse parallelam ordinatarum axi, habebimus $a = \frac{\sin\alpha}{o}$, ergo

$$y = \frac{\sin\alpha}{o}x$$

$$x = o$$

Haec aequatio significat lineam, quae transit coordinatarum initium eademque parallela est ordinatarum axi, h. e. aequatio significat ordinatarum axem.

§. 15.

Ponamus in aequatione

$$y = ax + b$$

esse $a = o$ i. e. $ax = o$, aequatio in hanc mutabitur

$$y = b.$$

Quum in hac aequatione $x$ deletum sit, sequitur eam significare lineam, cujus abscissae non pendeant ab ordinatis. Linea vero cujus singula puncta diversas quidem abscissas, sed eandem ordinatam habent, parallela esse debet abscissarum axi; ergo

$$y = b$$

significat rectam abscissarum axi parallelam. Quia $b$ incerti est valoris, videmus innumerabiles ejusmodi lineas duci posse.

Ceterum jam ex hypothesi $\alpha = o$ patet, aequationem

$$y = b$$

habere quam diximus significationem.

Porro ponamus $\alpha = \beta$, erit $a = \frac{\sin \alpha}{o} = \infty$ et aequatio

$$y = ax + b$$

mutabitur in hanc

$$y = \infty\, x$$

vel

$$x = \frac{y}{\infty}$$

Si in hac aequatione $y$ habet valorem definitum, erit aequatio

$$x = o$$

h. e. linea erit ordinatarum axis; sin $y = \infty$ aequatio erit

$$x = \frac{\infty}{\infty}$$

in qua $\frac{\infty}{\infty}$ quantitas incerti valoris est atque idem significat, quod $b$ in aequatione

$$y = b.$$

Nostra aequatio autem

$$x = \frac{\infty}{\infty}$$

significat lineam ordinatarum axi parallelam.

§. 16.

*Prroblema.* Quaeratur aequatio lineam rectam significans, quae datum punctum transeat.

Sint dati puncti cognitae coordinatae $x'$ $y'$.

Jam ponamus, hoc punctum positum esse in recta quadam

$$y = ax + b$$

haud dubie eandem rectam hac aequatione significare licebit

$$y' = ax' + b$$

in qua $x'$ et $y'$ certi puncti coordinatae pro $x$ et $y$ positae sunt, quae ad certum lineae punctum non pertinent. Ex utraque vero aequatione tertia haec derivatur

$$y - y' = a\,(x - x')$$

Qua quidem in aequatione quum pro altera constantium $b$ reperiantur notae quantitates $x'$ et $y'$, ex iis, quae antea diximus, sequitur, ut aequatio significet rectam, quae certum punctum transeat. Ponamus rectam $AB$ (fig. 2) transire punctum $H$, cujus coordinatae $x' = c$, $y' = d$, aequatio rectae $AB$ erit $y - d = a\,(x - c)$.

Jam sit punctum datum, quod recta transeat, initium coordinatarum. Quum hujus puncti coordinatae sint $x' = y' = o$, nanciscimur, si eas in aequatione

$$y - y' = a\,(x - x')$$

substituimus

$$y - o = a\,(x - o)$$
$$y = ax$$

eandem aequationem, quam antea jam invenimus. Ceterum monendum est ex utraque aequatione

$$y = a x + b$$
$$y' = a x' + b$$

aliam inveniri posse, in qua $a$ deletum sit, quaeque idem significet, quod

$$y - y' = a(x - x')$$

§. 17.

*Problema.* Quaeratur aequatio rectam significans, quae duo puncta data transeat. Sint coordinatae horum puntorum $x'$ $y'$, $x''$ $y''$; in aequatione rectae pro $x$ et $y$ non solum $x'$ et $y'$ sed etiam $x''$ et $y''$ substituere licebit. Itaque habemus has tres aequationes

$$y = a x + b$$
$$y' = a x' + b$$
$$y'' = a x'' + b$$

Harum aequationum ope et $a$ et $b$ invenire sive eliminare possumus habebimusque hanc aequationem

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} x + \frac{y' x'' - y'' x'}{x'' - x'}$$

quae haud dubie lineam significat, quae duo puncta transit sive certum habet situm, propterea quod utraque constans nota est

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

$$b = \frac{y' x'' - y'' x'}{x'' - x'}$$

Forma, quam haec aequatio plerumque induit, haec est

$$(x'' - x')\, y - (y'' - y')\, x = y' x'' - y'' x'$$

Ponamus rectam $AB$ (fig. 2.) transire puncta $E$ et $C$; sint coordinatae puncti $E$, $GE = x' = c$, $FE = y' = d$, puncti $C$, $x'' = CO = -e$, $y'' = o$; lineae $AB$ erit aequatio $\quad -(e + c)\, y + d x = -d e.$

§. 18.

Aequatio

$$(x'' - x')\,y - (y'' - y')\,x = x''y' - x'y''$$

induit formam ad singulas propositiones demonstrandas satis aptam; si respicimus puncta, in quibus recta coordinatarum axes secat. Transeat igitur (Fig. 2) $IK$ puncta $I$ et $K$, quae in coordinatarum axibus sunt posita: habebimus coordinatas puncti $I$, $x' = o$, $y' = OI$, puncti $K$, $x'' = OK$, $y'' = o$, ergo aequatio rectae $HI$

$$OK.y + OI.\,x = OK.\ OI.$$

Ponamus $OI = q$, $OK = p$, erit aequatio

$$py + q\,x = pq$$

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1$$

Eodem modo habebimus, si (Fig. 2.) $CO = -p'$, $OD = q'$, aequationem rectae $CD$

$$-p'y + q'x = -p'q'$$

Majoris momenti nobis est haec forma aquationis

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1$$

quia ex ea cognoscere possumus, quanam ratione recta, qualis $IK$, in puncto quodam sit divisa. Si enim ponitur $y = nq$, $x = (1 - n)\,p$, recte habebit aequatio; inde sequitur $nq$ et $(1 - n)\,p$ esse coordinatas puncti, in linea $IK$ positi. Igitur si sit $M$ punctum, cujus coordinatae $nq$, $(1 - n)\,p$, habebimus $ON = n.q$ ergo $KM = n.IK$ vel $IK : MK = 1 : n$

et

$$IM : MK = (1 - n) : n.$$

Videmus igitur, quantitates $n$ et $(1 - n)$, quae sunt coefficientes quantitatum $q$ et $p$, quas recta in coordinatarum axibus desecat, nobis exhibere numeros rationis, qua divisa est in puncto $M$ recta $IK$. Itaque si in sequentibus invenerimus abscissam ejusmodi lineae qualis $IK$,

$x = \frac{r\,s}{\nu - \omega}\,p$, hujus puncti erit ordinata $y = (1 - \frac{r\,s}{\nu - \omega})\,q$ et recte concludemus, lineam in hoc puncto hac ratione

$$\frac{r\,s}{\nu - \omega} : (1 - \frac{r\,s}{\nu - \omega}) \text{ esse divisam.}$$

Si $n$ quantitas fit negativa, habemus $-nq$, $(1+n)\,p$. Puncta, quorum coordinatae $-nq$, $(1+n)\,p$ vel $-np$, $(1+n)\,q$, posita sint necesse est in producta recta $IK$, e. g. $Q$, $R$. Habemus, si abscissa puncti $R = -np$, ordinata $= (1+n)\,q$; $- n.IK : IK = -n : 1$

$$IR : RK = n : (1+n)$$

Ergo per $n$ et $(1+n)$ iterum ratio data est linearum $IR$ et $KR$.

Quod de recta $IK$ dictum est, idem de $CD$ et aliis ejusmodi rectis dici potest.

§. 19.

*Problema.* Sint (fig. 3.) coordinatae punctorum $I$ et $H$ datae, sit porro $GF : GH = n \cdot (1-n)$; quaeritur quomodo coordinatae puncti $G$ ex his, quae data sunt, inveniri possint.

Puncti $H$ coordinatae sint $x'$, $y'$; puncti $F$ $x''$, $y''$; puncti $G$ $x$, $y$.

Haud dubie aequatio recte habet

$$x' = x'' - (x'' - x')$$

$$(1-n)\,x' = (1-n)\,x'' - (1-n)\,(x'' - x')$$

$$x' + (1-n)\,(x'' - x') = n\,x' + (1-n)\,x''$$

$$x' + (1-n)\,(x'' - x') = x$$

$$\text{ergo} \qquad x = n\,x' + (1-n)\,x''$$

Eodem modo invenitur

$$y = n\,y' + (1-n)\,y''$$

Si $n = \frac{1}{2}$, est etiam $1 - n = \frac{1}{2}$ et habemus

$$x = \frac{x' + x''}{2}$$

$$y = \frac{y' + y''}{2}$$

§. 20.

*Problema.* Inveniatur aequatio, quae significet angulum, quem duae rectae efficiant.

Sint $QR$ et $AB$ (fig. 2.) rectae datae, quaeratur formula, quae exhibeat angulum $KLC$. Ponamus $KLC = w$; coordinatarum angulum $= \beta$; porro $RKX = \alpha$, $BCX = \alpha'$. Sit aequatio rectae $QR$

$$y = ax + b$$

rectae $AB$

$$y = a'x + b'$$

habemus

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad a' = \frac{\sin \alpha'}{\sin (\beta - \alpha')}$$

Inde igitur efficitur

$$\frac{1}{a} = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta . \cos \alpha - \sin \alpha . \cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{a} = \sin \beta . \text{cotang } \alpha - \cos \beta$$

$$\frac{1}{a} + \cos \beta = \sin \beta . \text{cotang. } \alpha$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{\sin \beta}{\frac{1}{a} + \cos \beta} = \frac{a \sin \beta}{1 + a \cos \beta}$$

eodem modo est

$$\text{tang } \alpha = \frac{a' \sin \beta}{1 + a' \cos \beta};$$

Est vero

$$w = \alpha - \alpha'$$

ergo

$$\text{tang } w = \text{tang } (\alpha - \alpha')$$

$$\text{tang } w = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha . \text{ tang } \alpha'}$$

et si pro tang $\alpha$ et tang $\alpha'$ valores substituimus, quos in praecedentibus invenimus

$$\text{tang } w = \frac{(a-a')\sin\beta}{1+(a+a')\cos\beta+aa'};$$

haec est formula, quae erat quaerenda. Qua quidem e formula plures aliae derivari possunt, quae magni sunt momenti.

§. 21.

Primum ponamus rectas

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

esse parallelas, habebimus

$$w = o$$

$$\text{tang } w = \frac{(a-a')\sin\beta}{1+(a+a')\cos\beta+aa'} = o$$

ergo

$$(a-a')\sin\beta = o$$
$$a = a'$$

h. e. si duas habemus rectas, quarum aequationes

$$y = ax + b$$
$$y = ax + b'$$

non nisi constantibus b et b' inter se differunt, recte concludimus, eas esse parallelas. Hoc alio etiam modo facile demonstrari potest.

§. 22.

Si ponamus, esse

$$w = 1R$$

erit

$$\text{tang } w = \infty$$

ergo

$$\frac{(a-a')\sin\beta}{1+(a+a')\cos\beta+aa'} = \infty$$

Quia vero $(a-a')\sin\beta$ semper est quantitas certis finibus inclusa, erit

$$1+(a+a')\cos\beta+aa'=o$$

unde sequitur

$$a=-\frac{1+a'\cos\beta}{a'+\cos\beta}$$

h. e. si duae rectae datae sunt, quarum altera alteram secat,

$$y=ax+b$$
$$y=a'x+b'$$

et demonstrari potest, esse

$$a=-\frac{1+a'\cos\beta}{a'+\cos\beta}$$

vel

$$a'=-\frac{1+a\cos\beta}{a+\cos\beta}$$

illud etiam demonstratum est, alteram alteri insistere ad perpendiculum normatam.

Si coordinatarum angulus $=1R$, habemus $a=-\frac{1}{a'}$ vel $a'=-\frac{1}{a}$; h. e. si data est recta $y=ax+b$, habemus aequationem perpendiculi, quod datae insistit, si coordinatarum angulus $=1R$

$$y=-\frac{1}{a}x+C.$$

§. 23.

Jam ut sit data recta

$$y=ax+b,$$

Quaeratur aequatio significans perpendiculum, in datam e certo puncto, cujus coordinatae $x'$ $y'$, demissum.

Aequatio perpendiculi in datam demissi erit

$$y=-\frac{1+a\cos\beta}{a+\cos\beta}x+C$$

ubi $C$ quaelibet est quantitas constans. Quum vero haec linea punctum x', y' transeat, habemus

$$y' = -\frac{1 + a\cos\beta}{a + \cos\beta} x' + C$$

et inde

$$y - y' = -\frac{1 + a\cos\beta}{a + \cos\beta} (x - x')$$

Haec igitur est aequatio, quae erat quaerenda.

Si $\beta = 1R$ aequatio in hanc transit

$$y - y' = -\frac{1}{a} (x - x')$$

§. 24.

Ponamus alteram datarum rectarum

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

quae efficiant angulum rectum, esse alterutrum coordinatarum axium. Si ponamus

$$y = a'x + b'$$

esse abscissarum axem, erit

$$\alpha' = o \text{ et } a' = o\,;$$

sin ponamus, eandem esse ordinatarum axem, habebimus

$$\beta = \alpha'$$
$$a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha')} = \frac{\sin\alpha'}{o}$$
$$\frac{1}{a'} = o$$

Jam si in aequatione, quam ex hypothesi, rectas datas efficere angulum rectum, habemus

$$1 + (a + a')\cos\beta + aa' = o$$

ponitur

$$a' = o$$

habemus

$$1 + a \cos\beta = o$$
$$a = -\frac{1}{\cos\beta};$$

sin ponimus,

$$\frac{1}{a'} = o ,$$

aequatione

$$1 + (a + a') \cos\beta + aa'$$

in hanc mutata

$$\frac{1}{a'} + \left(\frac{a}{a'} + 1\right) \cos\beta + a = o ,$$

perspicitur esse

$$a = - \cos\beta$$

h. e. si in aequatione

$$y = ax + b$$

pro $a$ ponitur $-\frac{1}{\cos\beta}$, habemus aequationem lineae, quae perpendiculum est in abscissarum axem demissum

$$y = -\frac{1}{\cos\beta} x + C ,$$

sin pro $a$ ponitur $-\cos\beta$, erit

$$y = - \cos\beta\ x + C$$

quae est aequatio rectae, quae ad perpendiculum normata insistit ordinatarum axi.

Si postulatur, ut haec perpendicula certum punctum, cujus coordinatae $x', y'$, transeant, eorum aequationes erunt

$$y - y' = -\frac{1}{\cos\beta} (x - x')$$
$$y - y' = -\cos\beta\ (x - x').$$

Jam ponamus, punctum illud in alterutro coordinatarum axium esse situm. Sit e. g. (fig. 3.) $BA$ perpendiculum, quod abscissarum axi, $CD$ vero perpendi-

culum, quod ordinatarum axi insistat. Utraque linea duplici modo aequatione significari potest. Si ponitur, *AB* esse perpendiculum a puncto *B* in *OX* demissum, lineae aequatio erit, quia puncti *p* coordinatae sunt $o, y'$

$$y - y' = - \frac{1}{\cos\beta} x;$$

sin ponitur, *AB* esse perpendiculum, e puncto *A*, cujus coordinatae $x'$, $o$, erectum, lineae aequatio erit

$$y = - \frac{1}{\cos\beta} (x - x')$$

Porro si statuimus, *CD* esse rectam, ordinatarum axem in *D* secantem, aequatio lineae erit

$$y - y' = - \cos\beta . x;$$

sin vero volumus, *CD* esse perpendiculum a puncto *C* in ordinatarum axem demissum, erit aequatio

$$y = - \cos\beta (x - x')$$

§. 25.

*Problema.* Quaeratur aequatio lineae rectae, quae coordinatarum angulum in duas aequales partes dividat.

Quia linea, cujus aequatio quaerenda est, coordinatarum initium transit, sequitur, ut aequatione significari possit

$$y = ax$$

Jam hoc unum restat, ut statuamus, qui sit valor constantis $a$. Quum vero $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ esse debeat, habemus $\beta = 2\alpha$, igitur

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(2\alpha - \alpha)} = 1,$$

ergo

$$y = x$$

aequatio est rectae, quae coordinatarum angulum in duas aequales partes dividit. Quia recta, quae in duas aequales partes dividit angulum eum, qui

est contiguus angulo $\beta$, ad perpendiculum normata insistit ei, quae angulum $\beta$ in duas aequales partes dividit, facile e formula

$$y - y' = -\frac{1 + a\cos\beta}{a + \cos\beta}(x - x')$$

videre licet, quia $x' = y' = o$, et $a = 1$, hujus lineae aequationem esse

$$y = -x$$

Magis generatim hanc rem tractavit Plückerus in l. l. Tom. I. §. 27 et seqq. Ubi enim derivatam videmus aequationem rectae, quae angulum in duas aequales partes dividit, quam duae quaelibet rectae comprehendunt. Quia recta, quae angulum in duas aequales partes dividit, locus est geometricus punctorum, a quorum quoque ad anguli crura aequalia perpendicula duci possunt, facile demonstrari potest, si anguli crura

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

lineae, quae angulum in duas aequales partes dividat, aequationem esse

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \pm(y - a'x - b')\cos\alpha',$$

in qua $\alpha$ et $\alpha'$ anguli sunt, quos illae rectae cum primo coordinatarum axe efficiunt. Ceterum animadvertendum est, aequationem hac conditione derivatam esse, ut sit coordinatarum angulus $= 1\,R$.

E duplici signo apparet, duas esse rectas, quae positis conditionibus sufficiant. Hujus rei causa in eo cernitur, quod duae rectae semper efficiunt duos angulos, qui ut in aequales partes dividantur, duabus lineis opus est, quarum alteram haec aequatio

$$(y - ax - b)\cos\alpha = (y - a'x - b')\cos\alpha$$

alteram vero haec

$$(y - ax - b)\cos\alpha = -(y - a'x - b')\cos\alpha'$$

nobis exhibet. Utraque haec aequatio satis commode hoc modo exprimi potest

$$A = A'$$
$$A = -A'$$

## §. 26.

*Problema.* Inveniatur ex aequationibus duarum rectarum sibi incidentium aequatio rectae, quae idem punctum transeat, in quo illae sibi incidant.

Sint rectarum sibi incidentium aequationes

$$y = ax + b \quad \text{(I.)}$$
$$y = a'x + b' \quad \text{(II.)}$$

Primum intelligitur, has lineas in puncto, quod iis est commune, habere communes, i. e. aequales coordinatas. Itaque ponere licitum est, in illis aequationibus esse $y = y$, $x = x$, quo posito fit, ut recte derivetur ex iis haec aequatio

$$y + y = ax + a'x + b + b'$$
$$2y = (a + a')x + b + b'$$
$$y = \frac{a + a'}{2}x + \frac{b + b'}{2} \quad \text{(III.)}$$

Qua quidem in aequatione cum coordinatarum potentia primum gradum non excedat, sequitur, eam esse aequationem lineae rectae. Rectam vero, hac ipsa aequatione exhibitam, punctum transire, in quo datae rectae

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

sibi incidant, ex sequentibus apparebit. Si valorem coordinatarum ejusdem puncti quaesiveris ex aequationibus

$$y = ay + b$$
$$y = a'x + b'$$

habebis

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}; \quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

Jam eodem modo quaeramus, qui sit valor coordinatarum puncti, in quo sibi incidant rectae

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{a+a'}{2}x + \frac{b+b'}{2}$$

Quia pariter his lineis in puncto in quo sibi incidunt, eaedem coordinatae sint necesse est, habemus

$$y = y = ax + b = \frac{a+a'}{2}x + \frac{b+b'}{2}$$

igitur

$$\frac{2a - a - a'}{2}x = \frac{b + b' - 2b}{2}$$

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}$$

est igitur

$$y = ax + b = a\frac{b' - b}{a - a'} + b = \frac{ab' - a'b}{a - a'};$$

ergo coordinatae puncti, in quo rectae (I.) et (II.) sibi incidunt, caedem sunt coordinatae puncti, in quo rectae (I.) et (III.) sese secant; h. e. (I,) (II.) (III.) unum idemque punctum transeunt, sive (III.) punctum transit, in quo (I) et (II) sibi incidunt.

## §. 27.

Jam paulo accuratius de natura aequationis (III.) exponendum est. Vidimus, aequationem (III.) ortam esse ex aequationibus

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b';$$

quia vero secunda aequatio ita scribi potest

$$1 \,.\, y = 1 \,.\, a'x + 1 \,.\, b',$$

dicere licet, aequationem (III.) ita esse ortam, ut aequatio (II.) per unitatem multiplicata cum aequatione (I) additione sit conjuncta. Porro si aequationem (II) per $-1$ multiplicatam cum aequatione (III) eodem modo conjungimus, oritur aequatio (I), quae, ut constat, punctum transit, in quo (II) et (III) sese secant. Ut vero e datis duarum rectarum aequationibus tertia,

lineam significans, quae punctum transeat, in quo datae sibi incidant, ita derivetur, ut latius pateat, pro unitate ponenda erit indefinita quantitas, quae et positiva, et negativa esse possit. Significemus hanc quantitatem per $\mu$; aequatio (II) per $\mu$ multiplicata

$$\mu\, y = \mu\, a'\, x + \mu\, b'$$

cum (I) addendo conjuncta efficit hanc aequationem

$$(1 + \mu)\ y = (a + \mu\, a')\ x + b + \mu b'$$

sive

$$y = \frac{a + \mu a'}{1 + \mu}\, x + \frac{b + \mu b'}{1 + \mu}.$$

Haec aequatio significat quamlibet rectam, quae punctum transit, in quo (I) et (II) sibi incidunt.

Si ponitur $\mu = \frac{m'}{m}$, aequatio nostra hanc formam induit

$$y = \frac{a + \frac{m'}{m} a'}{1 + \frac{m'}{m}}\, x + \frac{b + \frac{m'}{m} b'}{1 + \frac{m'}{m}}$$

sive

$$y = \frac{m a + m'a'}{m + m'}\, x + \frac{m b + m'b'}{m + m'}$$

unde

$$(m + m')\ y = (m a + m'a')\ x + mb + m'b'\ \text{(V)}$$

Quam quidem aequationem, quae non minus late patet, quam aequatio (IV), quia $\frac{m'}{m}$ non magis definita est quantitas, quam $\mu$, nanciscimur, si aequationes (I) et (II) per $m$ et $m'$ multiplicatas addendo conjungimus. Ceterum per se patet, aequationem (V) idem significare, quod (IV) significet.

§. 28.

Si $a$, $b$; $a'$, $b'$ in (I) et (II) sunt quantitates notae, illud $\mu$ ita definire licebit, ut aequatio

$$y = \frac{a + \mu a'}{1 + \mu} x + \frac{b + \mu b'}{1 + \mu}.$$

certam lineam, sive lineam, quae certum habeat situm, exhibeat. Nam si

$$y = ax + b \quad \text{(I)}$$
$$y = a'x + b' \quad \text{(II)}$$

significant certas lineas, etiam hae aequationes

$$y = \frac{a + a'}{2} x + \frac{b + b'}{2} \text{(III)}$$
$$y = \frac{a + 3a'}{4} x + \frac{b + 3b'}{4} \text{(VI)}$$
$$y = \frac{3a + 5a'}{8} + \frac{3b + 5b'}{8} \text{(VII)}$$

quarum (VI) et (VII) eodem modo derivatae sunt ex aequationibus (II) et (III), (III) et (VI), quo (III) ex aequationibus (I) et (II), certas lineas significare debent; ex antecedentibus vero etiam notum est, aequationibus (III) (VI) (VII) exhiberi lineas, quae punctum transeant, in quo (I) et (II) sese secent. Facile autem perspicitur, aequationes (III) (VI) (VII) ex aequatione (IV) derivari posse. Nam si ponitur $\mu = 1$ mutatur aequatio (IV) in (III), si $\mu = 3$, (IV) in (VI) transit, si $\mu = \frac{5}{3}$ e (IV) prodit (VII). Eodem modo aequationes (III) (VI) (VII) ex aequatione (V) derivari possunt. E (V) oritur (III), si ponitur $m = 1$ $m' = 1$; oritur (VI), si $m = 1$, $m' = 3$; oritur (VII) si $m = 3$, $m' = 5$.

## §. 29.

Ex antecedentibus sequitur, si datae sint aequationes rectarum

$$y = ax + b \qquad \text{(I)}$$
$$y = a'x + b' \qquad \text{(II)}$$
$$y = Ax + B \qquad \text{(VIII)}$$
$$y = A'x + B' \qquad \text{(IX)}$$

quarum (I) et (II), (VIII) et (IX) sese secent, et (I) et (II) quidem in recta

$$y = \frac{a + \mu a'}{1 + \mu} + \frac{b + \mu b'}{1 + \mu}$$

(VIII) et (IX) in recta

$$y = \frac{A+\mu' A'}{1+\mu'} + \frac{B+\mu' B'}{1+\mu'}$$

ut (I) et (II), (VIII) et (IX) in eadem recta sese secent, si demonstrari possit, esse:

$$\frac{a+\mu a'}{1+\mu} = \frac{A+\mu' A'}{1+\mu'} \quad (X)$$

$$\frac{b+\mu b'}{1+\mu} = \frac{B+\mu' B'}{1+\mu'} \quad (XI)$$

Ergo si quantitates $\mu$ et $\mu'$ ita eligere possumus, ut recte habeant aequationes (X) et (XI), jure concludimus, rectas (I) et (II), (VIII) et (IX) in eadem recta sibi incidere.

§. 30

Theorema in iis, quae proxime antecedunt, tractatum etiam inverti potest. Si nobis data est aequatio lineae rectae, in qua duae aliae sese secant, ex eadem aequatione duae aliae derivari possunt, quae lineas in illa recta, quam significat data aequatio, sibi incidentes exhibent.

Data sit aequatio

$$y = Ax + B.$$

sive

$$y - Ax - B = o.$$

Ponamus

$$A = \frac{a+\mu a'}{1+\mu};\ B = \frac{b+\mu b'}{1+\mu},$$

aequatio in hanc transibit

$$y - \frac{a+\mu a'}{1+\mu}x - \frac{b+\mu b'}{1+\mu} = o$$

sive

$$(1+\mu)\,y - (a+\mu a')\,x - (b+\mu b') = o\,;$$

in hac vero aequatione ponere licet

$$y - ax - b = o$$

$$\mu y - \mu a' x - \mu b' = o$$

sive

$$y = ax + b$$
$$\mu y = \mu a' x + \mu b'.$$

Quae quidem rectarum aequationes quum tales sint, ut, si eas conjungamus alteram alteri addendo, efficiant aequationem

$$y = Ax + B$$

recte concluditur, eas significare ejusmodi rectas, quae in ea, quam exhibet

$$y = Ax + B$$

sese secent.

Porro si habemus

$$A = \mu\alpha' - \alpha$$
$$B = \gamma' + \gamma;$$

aequationes

$$y = \mu\alpha' x + \gamma'$$
$$\alpha x = \gamma$$

etiam duas rectas exhibent, quae in recta

$$y = Ax + B$$

sibi incidunt. Inde vero jam perspicitur, tot linearum paria inveniri, quae in data recta sibi incidant, quot paria inveniantur aequationum, quae additione inter se conjunctae efficiant aequationem

$$y = Ax + B.$$

§. 31.

*Theorema.* Magnitudo cujuslibet rectae exprimi potest ope coordinatarum, quae ad ejusdem lineae fines pertinent.

Invenienda sit magnitudo rectae $HF$ (fig. 3.); sint coordinatae puncti F. $x''$, $y''$; puncti $H$ $x'$, $y'$

Est haud dubie

$$\overline{HF}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{QH}^2 - 2\, QF\,.\,QH\,.\cos.YOX$$
$$HF = \sqrt{(\overline{QF}^2 + \overline{QH}^2 - 2\, QF.QH.\cos\beta)}$$

Est vero $QF = NF - QN = x'' - x'$

$$QH = KH - QK = y' - y'' = -(y'' - y')$$

ergo

$$HF = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2\,(x'' - x').(y'' - y')]\,.\cos\beta}.$$

§. 32.

His ita expositis reliquum est, ut doceamus, quomodo e coordinatis, quae ad singulos figurae angulos pertineant, ipsius figurae area inveniri possit. Datum sit quatrilaterum *ABCD* (fig. 4.), coordinatae angulorum *A*, *B*, *C*, *D* sint $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$, $x_4\,y_4$.

Jam in promptu est, aream quadrilateri esse

$$ABCD = ABFE + BCGF - CDHG - DAEH.$$

Est vero

$$ABFE = (AE + BF).\ \tfrac{1}{2}\ EF.\ \sin\beta$$
$$= (AE + BF).(OF - OE).\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$
$$= (x_1 + x_2).(y_2 - y_1).\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$

Eodem modo

$$BCGF = (x_2 + x_3).(y_3 - y_2).\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$
$$CDHG = ({}_3x + x_4).(y_3 - y_4).\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$
$$DAEH = (x_4 + x_1).(y_4 - y_1).\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$

Ergo

$$ABCD = [(x_1 + x_2).(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3).(y_3 - y_2) - (x_3 + x_4).(y_3 - y_4) - (x_4 + x_1).(y_4 - y_1)].\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$

Jam si multiplicationes indicatas confecerimus et tot quantitates inde ortas, quot licet, deleverimus, habebimus

$$ABCD = \tfrac{1}{2}\sin\beta\,[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)]$$

Inde perspicitur, aream quadrilateri cujusdam inveniri, si abscissas singulorum angulorum eodem ordine sequentium per differentias ordinatarum ita multiplicemus, ut abscissa cujusque anguli multiplicetur per differentiam ordinatarum anguli proxime antecedentis et proxime sequentis, et singula producta additione inter se conjungamus. Area quadrilateri est quantitas negativa, si eam ex nostra formula quaerimus simulque ponimus punctorum *A*, *D*, *C*, *B*

coordinatas esse $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$. Haud raro fieri solet, ut figurae alicujus area, coordinatarum ope inventa, exhibeatur quantitate negativa.

Formula quae exhibet aream cujuslibet quadrilateri paulo brevius ita exprimi potest,

$$\square = [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)(y_3 - y_1)] . \tfrac{1}{2} \sin \beta,$$

propterea quod

$$x_3 (y_4 - y_2) = - x_3 (y_2 - y_4)$$
$$x_4 (y_1 - y_3) = - x_4 (y_3 - y_1)$$

Quod de quadrilatero diximus, idem, ut per se apparet, de triangulo et quolibet polygono valet.

# Caput II.

## De symbolorum usu ad propositiones demonstrandas.

§. 33.

Postquam in antecedentibus symbolorum naturam, quae ad lineam rectam spectant, cognovimus, jam exponendum est, quomodo ea ad demonstrandas propositiones geometricas sint adhibenda. Priusquam vero rem ipsam aggrediamur eamque exemplis doceamus, in universum quaedam de demonstrationibus symbolorum ope conficiendis praemittenda sunt.

Ut symbolorum ope propositionum demonstrationes juste conficiamus, praecipue tria observanda sunt. Primum enim cavendum est, ne symbolorum usui plus justo inserviat usus figurarum, neve e constructionibus ad demonstrationes conficiendas petantur nisi symbola, quae constructionum proprietatem non redoleant*). Deinde symbola e figuris petita ita sunt tractanda, ut e trac-

*) Qui sit horum verborum sensus ut recte intelligatur, proferre liceat Molweidii verba, quae leguntur in Klügelii vocabulario mathematico tom. IV. pag. 879. In den neuesten Zeiten, inquit ille, hat man die algebraische Behandlung geometrischer Gegenstände dadurch von der Betrachtung der Figur noch unabhängiger zu machen gesucht, daß man die Lage aller Punkte im Raume und damit auch den Zug gerader sowohl als krummer Linien, und die Verbreitung ebener und gekrümmter Flächen in denselben durch Coordinaten, wozu man in der Regel rechtwinklige wählt, bestimmt, übrigens aber dieselbe Maxime, welche die alten Geometer rücksichtlich der Einmischung der Arithmetik in die Geometrie befolgt, d. h. nur die zur Aufstellung der Fundamentalgleichungen unumgänglich nöthigen allgemeinern Sätze

tatione prodeant alia symbola, e quorum nota significatione quod volumus videre possumus. Denique ut facile nota haec symbola prodeant, ad id adtendendum est, ut apte eligamus coordinatarum axes et praecipue, ut recte statuamus eorum initium.

§. 34.

*Theorema.* Si certa data est recta et punctum quoddam, extra eam positum, ab ipso hoc puncto in datam una tantum recta ad perpendiculum demitti potest.

Sint dati puncti coordinatae $x'$ $y'$; data vero recta

$$y = ax + b;$$

recta igitur, in hanc ad perpendiculum demissa, quae simul punctum datum transit (§. 23.).

$$y - y' = -\frac{1 + a\cos\beta}{a + \cos\beta}(x - x').$$

Est vero ex hypothesi $a$ quantitas nota, ergo aequatio modo inventa lineas diversas significare non potest, quia omnes quantitates exceptis variabilibus x et y notae sunt. — Eadem est demonstratio propositionis, e puncto quodam rectae unum tantum perpendiculum erigi posse.

§. 35.

*Theorema.* Quae recta ex vertice trianguli aequicruri ita in basin demittitur, ut, qui est ad verticem, angulum in duas aequales partes secet, basin eodem modo dividit, et est ipsa ad perpendiculum demissa.

Sit (fig. 5.) $AB = AC$, $BAD = DAC$, erit $BD = CD$, $ADB = ADC$.

Ponamus $AB$ et $AC$ esse coordinatarum axes et $A$ eorum initium; deinde $AB = p$. Aequatio lineae $BC$ erit (§. 18.).

der Geometrie, welche unmittelbaren Bezug auf die Coordinatenmethode haben, in Anwendung bringt, ohne erst vorläufige Constructionen zu machen und dadurch die Anwendung speciellerer Sätze vorzubereiten. —

$$py + px = p^2$$
$$y + x = p;$$

aequatio rectae $AD$ (§. 25).

$$y = x.$$

Jam quaeramus coordinatas puncti D, in quo utraque recta $BC$ et $AD$ easdem habent coordinatas, habebimus.

$$y = p - x$$
$$y = x$$
$$p - x = x$$
$$\tfrac{1}{2}p = x$$

ergo (§. 18.)

$$BD = CD.$$

Porro si aequationem

$$y + x = p \text{ sive } y = -x + p \quad \text{(I)}$$

comparamus cum hac

$$y = ax + b,$$

videmus esse $a = -1$, $b = p$.
Itaque perpendiculum in (I) demissum, quod simul initium coordinatarum, cujus coordinatae $y' = o$, $x' = o$, transit, erit (§. 23.).

$$y - o = -\frac{1 - 1 \cdot \cos\beta}{-1 + \cos\beta}(x - o)$$
$$y = x$$

Quae quidem aequatio quum significet rectam $AD$, sequitur, ut $AD$ ad perpendiculum normata insistat rectae $BC$. Facillime etiam propositio inversa demonstrari potest.

## §. 36.

*Theorema.* Quae recta angulum trianguli scaleni in duas partes aequales secat, eadem producta subjectum latus ita dividit, ut ejus partes inter se habeant rationem, quam habent ambo latera, quae angulum divisum comprehendunt.

Sit (fig. 6.) $ACD = BCD$. Ponamus $CA$ et $CB$ esse coordinatarum axes, porro $AC = p$, $BC = q$, erit aequatio lineae $AB$.

$$py + qx = pq \quad \text{(I)}$$

aequatio lineae $CD$

$$y = x \quad \text{(II)}$$

Itaque coordinatae puncti $D$ inveniri possunt, si in (I), quod secundum (II) licet, x ponimus pro y. Habemus ex aequatione

$$px + qx = pq$$

$$x = p \cdot \frac{q}{p+q}; \quad y = q \cdot \frac{p}{p+q};$$

Ergo (§. 18.)

$$AD : DB = \frac{p}{p+q} : \frac{q}{p+q} = p : q = AC : BC.$$

*Corollarium.* Si pro linea $CD$ ponimus lineam $CE$, quae angulum $BCF$ in duas partes aequales dividit, et cujus aequatio (§. 25.).

$$y = -x,$$

coordinatas puncti $E$ habebimus

$$x = p \frac{q}{q-p}; \quad y = q \cdot \frac{p}{q-p},$$

ergo

$$AE : BE = p : q = AD : BE.$$

## §. 37.

*Theorema.* In quoque parallelogrammo lineae diagonales invicem sese in duas aequales partes dividunt.

Sit (fig. 7.) $AB \parallel CD$ et $AD \parallel BC$. Punctum $A$ sit initium coordinatarum, pars abscissarum axis $AB = p$, $AD$ vero in ordinatarum axe $= q$, coordinatae puncti, quod est in media $BD$, sunt (§. 18.)

$$x = \tfrac{1}{2} p; \quad y = \tfrac{1}{2} q;$$

coordinatae, quae pertinent ad punctum, quod $AC$ in duas aequales partes dividit (§. 19.).

$$x = \frac{o+p}{2} = \tfrac{1}{2}\,p,$$

$$y = \frac{o+q}{2} = \tfrac{1}{2}\,q,$$

ergo utraque linea in eodem puncto in duas aequales partes divisa est, h. e. rectae *AC* et *BD* invicem sese in duas aequales partes dividunt.

§. 38.

Jam invertamus propositionem proxime antecedentem. Sit (Fig. 7.) $AE = EC$, $ED = EB$: erit *ABCD* parallelogrammum.

Sit *E* initium coordinatarum; $EB = p$, $EC = q$, $DE = -p$, $AE = -q$.

Recta *BC*

$$py + qx = pq;$$

Recta *AD*

$$-py - qx = pq \quad \text{sive} \quad py + qx = -pq,$$

unde sequitur (§. 21.)

$$BC \parallel AD;$$

porro recta *CD*

$$-py + qx = -pq,$$

recta *AB*

$$-py + qx = pq,$$

igitur

$$CD \parallel AB;$$

ergo est *ABCD* parallelogrammum.

§. 39.

*Theorema.* In quolibet antiparallelogrammo lineae diagonales sese ita secant, ut earum partes, alterutri parallelorum laterum adjacentes, inter se sint aequales.

Sit (Fig. 8.) $AB \parallel CD$, $AD = CB$: erit $DE = EC$, $AE = EB$.

Jam sit *E* initium coordinatarum, $EC = p$, $EA = -p'$, $ED = q$, $EB = -q'$.

Est aequatio rectae $CD$

$$y = -\frac{q}{p}x + q,$$

rectae $AB$

$$y = -\frac{q'}{p'}x + q'.$$

Quia vero $AB \parallel CD$, est

$$\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$$

Porro (§. 31).

$$\overline{BC}^2 = p^2 + 2pq'\cos\beta + q'^2 = p'^2 + 2p'q\cos\beta + q^2 = \overline{AD}^2$$
$$2pq'\cos\beta = 2p'q\cos\beta$$
$$q^2 = (\frac{pq'}{p'})^2$$

proinde

$$p^2 + q'^2 = p'^2 + (\frac{pq'}{p'})^2$$
$$(p^2 - p'^2)p'^2 = (p^2 - p'^2)q'^2,$$

ergo

$$p' = q'; \quad p = q.$$

Facile propositio inversa demonstrari potest. Si $DE = EC$, $AE = BE$, erit
$BC = \sqrt{(p^2 + 2pq'\cos\beta + q'^2)} = \sqrt{(p'^2 + 2p'q\cos\beta + q^2)} = AD$.

Porro aequatio rectae $CD$

$$py + px = p^2 \text{ sive } y = -x + p,$$

aequatio rectae $AB$

$$-p'y - p'x = p'^2 \text{ sive } y = -x - p',$$

ergo $CD \parallel AB$ et $ABCD$ antiparallelogrammum.

§. 40.

*Theorema.* Latera antiparallelogrammi non parallela producta sese secant in recta, quae angulum, quem lineae diagonales comprehendunt, in duas aequales partes dividit.

Sit, ut supra, $E$ initium coordinatarum; $DE = EC = p$, $AE = BE = -p'$, erit aequatio rectae $AD$

$$py - p'x = -pp',$$

rectae $BC$

$$-p'y + px = -pp'.$$

Si posteriorem aequationem, per $-1$ multiplicatam, additione cum priore conjungimus, rectam habemus (§. 28.), in qua utraque recta $BC$ et $AD$ sibi incidunt. Haec est

$$(p+p')y - (p+p')x = o$$
$$y = x$$

Quae quidem aequatio quum significet lineam, quae coordinatarum angulum DEC in duas aequales partes secat, quod contendimus recte habere perspicitur.

§. 41,

*Theorema.* Si a puncto quolibet vel lateris ipsius $AF$ trianguli $ABF$ (fig. 8.), vel lateris producti ducimus rectam $CD$, vel $HK$, quae parallela est lateri $AB$, semper recte habet haec proportio

$$AF : BF = DF : FC = FH : FK.$$

Sit $F$ initium coordinatarum; $FA = p$, $FD = p'$, $FH = p''$, $FB = q$, $FC = q'$, $FK = q''$. Est recta $AB$

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

recta $CD$

$$y = -\frac{q'}{p'}x + q'$$

recta $KH$

$$y = -\frac{q''}{p''}x + q''$$

Quia vero $AB \parallel CD \parallel KH$, etiam esse debet (§. 21.)

$$\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'} = \frac{q''}{p''}$$

5 *

sive

$$AB : BF \doteq DF : FC = FH : FK.$$

Vice versa, si ponitur esse $\frac{BF}{AB} = \frac{CF}{DF} = \frac{FK}{FH}$, $AB || CD || KH$ esse debet.

§. 42.

*Theorema.* Si (fig. 8.) $AF:FD = AB:CD = 1:m$, et $AF:FH = AB:HK = 1:-m$, recta $BF$ puncta $C$ et $K$ transeat necesse est.

Sunt haud dubie coordinatae puncti $C$, $x'' = mp$, $y'' = (1-m)q$; coordinatae puncti $K$, $x''' = -mp$, $y''' = (1+m)q$, si ponitur $A$ esse initium coordinatarum, $AB = p$, $AF = q$. Quum aequatio rectae $BF$

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1$$

recte habeat, sive pro $x$ et $y$ substituamus valores coordinatarum puncti $C$, sive puncti $K$, inde sequitur, ut utrumque punctum in $BF$ positum sit.

§. 43.

*Theorema.* Si ab angulorum verticibus trianguli cujusdam lineae ducuntur transversae ad puncta, in quibus trianguli latera in duas partes aequales sunt divisa, hae lineae transversae in uno eodemque puncto sese secant.

Sit (Fig. 8.) $AG = BG$, $BC \doteq CF$, $AD = DF$. Punctum $A$ sit initium coordinatarum, $AB = p$, $AF = q$. Est aequatio rectae

$FG$

$$\frac{p}{2} y + qx = \frac{pq}{2} \text{ (I)}$$

$BD$

$$py + \frac{q}{2} x = \frac{pq}{2} \text{ (II)}$$

$AC$

$$\frac{p}{2} y - \frac{q}{2} x = o \text{ (III)}$$

Jam quaeramus e (I) et (III) coordinatas puncti, in quo $AC$ et $FG$, e (II) et (III) coordinatas puncti, in quo $AC$ et $BD$ sibi incidunt. Puncti illius coordinatae sunt

$$x = \frac{2}{3} p, \quad y = \frac{1}{3} q$$

hujus

$$x = \frac{2}{3} p, \quad y = \frac{1}{3} q$$

unde apparet, rectas $FG$ et $BD$ in eodem puncto rectae $AC$ incidere.

Alia demonstrandi ratio. Quaeramus e (I) et (II) lineam, in qua $BD$ et $FG$ sese secent, quaeque simul transeat initium coordinatarum. Aequatione (I) per $-1$ multiplicata et cum (II) conjuncta, nanciscimur hanc aequationem.

$$\frac{p}{2} y - \frac{q}{2} x = o.$$

Ergo est $AC$ recta, in qua $BD$ et $FG$ sese secant.

*Corollarium.* E valore coordinatarum puncti $E$ patet, esse $GE : EF = 1 : 2$.

*Theorema.* Si ab angulorum verticibus trianguli cujusdam in ejus latera demittuntur perpendicula, haec in eodem puncto sese secant.

Sit (Fig. 8.) $A$ initium coordinatarum; pars axis primi $AB = p$, pars axis secundi $AF = q$.

Recta $BF$ est

$$y = -\frac{q}{p} x + q$$

recta igitur, quae lineae $BF$ ad perpendiculum normata insistit simulque initium coordinatarum transit, i. e. $AC$

$$y = -\frac{1 - \frac{q}{p} \cos\beta}{-\frac{q}{p} + \cos\beta} x \text{ sive } y = \frac{q \cos\beta - p}{p \cos\beta - q} x.$$

Porro est aequatio rectae $FG$ (§. 27.)

$$(y - q) \cos\beta + x = o \text{ sive } y \cos\beta + x = q \cos\beta$$

rectae $BD$

$$y + (x - p)\cos\beta = o \text{ sive } y + x\cos\beta = p\cos\beta$$

Jam videamus, annon aequatio rectae $AC$ ex aequationibus rectarum $BF$ et $BD$ ita derivari possit, ut e derivandi ratione concludere liceat, $AC$ esse rectam, in qua BF et $BD$ sibi incidant. Multiplicemus aequationem rectae $BD$ per $-\frac{q}{p}$ et aequationi rectae FG addamus, habebimus aequationem

$$y\cos\beta - \frac{q}{p}y + x - x\frac{q}{p}\cos\beta = o$$

$$y = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}x,$$

quae rectam $AC$ exhibet.

## §. 44.

*Theorema.* Perpendicula, in iis laterum trianguli cujusdam punctis erecta, quae latera dividunt in duas partes aequales, si satis produxeris, in uno eodemque puncto sese secabunt.

Sit (fig. 9.) $AF = BF$, $BD = CD$, $AE = CE$; $BDG = GEC = GFA = 90^o$; porro sit $B$ initium coordinatarum; $EC = p$, $AB = q$. Est recta $GE$

$$(y - \tfrac{1}{2}q) = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}(x - \tfrac{1}{2}p) \text{ sive } y = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}x + \frac{p^2 - q^2}{2(p\cos\beta - q)} \quad \text{(I)}$$

recta $DG$

$$y\cos\beta + x = \frac{p}{2} \quad \text{(II)}$$

recta FG

$$y + x\cos\beta = \frac{q}{2} \quad \text{(III)}$$

Si (III) per $-\frac{q}{p}$ multiplicatam additione cum (II) conjungimus, nanciscimur (I), unde apparet, propositionem nostram recte habere.

§. 45

Si in triangulo quodam $ABF$ (fig. 8.) lineae transversae $AC$, $BD$, $FG$ ita ducuntur, ut in uno puncto $E$ sese secent, semper est $FD.AG.BC = AD.BG.CF$.

Ponamus, $A$ esse initium coordinatarum; $AB = p$, $AF = q$; porro

$$AG:GB = m:n$$
$$DF:AD = r:s.$$

Patet, propositionem nostram recte habere, si demonstrari possit, esse

$$FC:BC = m.r.:n.s$$

Ex aequatione rectae $FG$

$$mpy + qx = mpq$$

et ex aequatione rectae $BD$

$$py + sqx = spq$$

invenitur aequatio rectae $AE$

$$r.m.p.y = n.s.q.x;$$

ex hac vero et ex aequatione rectae $BF$

$$py + qx = pq$$

inveniuntur coordinatae puncti $C$

$$x = p.\frac{r.m}{r.m+s.n},\quad y = q.\frac{n.s}{r.m+s.n};$$

unde sequitur, ut sit

$$FC:BC = m.r:n.s.$$

§. 46.

Si a lateribus parallelogrammi cujusdam $ABCD$ (fig. 10.) vel ipsis, vel productis desecantur inde ab angulorum verticibus partes proportionales, ita ut sit $AE:EB = CG:GD$; $DH:HA = CK:BK$; $AE':E'B = CG':G'D$; $DH':H'A = BF':F'C$, et puncta $E, F, G, H$ et $E', F', G', H'$ rectis junguntur, cum EFGH, tum E'F'G'H' est parallelogrammum.

Sit $A$ initium coordinatarum, pars axis primi $AB = p$, axis secundi pars $AD = q$; $AE = m.p$, $BF = n.q$; $AE = AE'$, $BF = BF'$. Ex his habemus coordinatas punctorum $E, F, G, H$, $mp, o$; $p, nq$; $(1-m)p, q$; $o, (1-n)q$.

Est igitur aequatio rectae *HE*

$$mpy + (1-n)\, qx = m.\,(1-n)\, pq \quad \text{(I)}$$

aequatio rectae *GF*

$$mpy + (1-n)\, qx = [(1-m).\, n - 1]\, pq \quad \text{(II)}$$

aequatio rectae *HG*

$$(1-m)\, py - nqx = (1-m).\,(1-n)\, pq \quad \text{(III)}$$

aequatio rectae *EF*

$$(1-m)\, py - nqx = -m\,.\,n\, pq \quad \text{(IV)}$$

Ex aequationibus (I) et (II) sequitur $GF \parallel HE$; ex (III) et (IV) $AG \parallel EF$. Quia vero efficiuntur aequationes rectarum $E'H'$ et $G'F'$, $H'G'$ et $E'F'$, si in aequationibus (I) et (II), (III) et (IV) pro $m$ et $n$ ponitur $-m$ et $-n$, patet, etiam esse $E'H' \parallel G'F'$ et $H'G' \parallel E'F'$.

Quum coordinatae punctorum, in quibus lineae diagonales parallelogrammorum $ABCD, EFGH, E'F'G'H'$ sibi incidunt, sint $x' = \frac{1}{2} p$, $y' = \frac{1}{2} q$; $x'' = \frac{(1-m)p + mp}{2} = \frac{p}{2}$, $y'' = \frac{q + o}{2} = \frac{q}{2}$; $x''' = \frac{(1+m)p - mp}{2} = \frac{p}{2}$, $y''' = \frac{q}{2}$, perspicitur, lineas diagonales horum parallelogrammorum in eodem puncto sese secare.

## §. 47.

Si coordinatas punctorum $F, G, H, E$ per $x_1\, y_1,\; x_2\, y_2,\; x_3\, y_3,\; x_4\, y_4$ significemus, habebimus

$$EFGH = [(x_1 - x_3).(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)\,(y_3 - y_1)]\,.\, \tfrac{1}{2} \sin\beta.$$

$$= [pq + (1-2m).(1-2n)\, pq]\,.\, \tfrac{1}{2} \sin\beta$$

$$= [1 + (1-2m).\,(1-2n)].\, \tfrac{1}{2} pq \sin\beta.$$

$$E'F'G'H' = [1 + (1+2m).\,(1+2n)].\, \tfrac{1}{2} pq \sin\beta.$$

Est igitur

$$EFGH + E'F'G'H' = (4 + 8\, mn).\, \tfrac{1}{2}\, pq \sin\beta$$

$$= 2pq \sin\beta + 2\, mp\,.\, 2\, nq \sin\beta.$$

Jam si ponamus, quod haud dubie licet, $mp = nq$ sive $AE = BF$, erit $EFGH + E'F'G'H' = 2\,pq \sin\beta + 4\,m^2p^2 \sin\beta = ABCD + 4\,AE^2 \sin\beta$.

h. e. Si a lateribus parallelogrammi et ipsis et productis eodem ordine desecantur partes aequales, puncta deinde, quae cum hac, tum illa desecandi ratione nacti sumus, rectis junguntur, efficiuntur duo parallelogramma, quorum summam habebimus, si duplo parallelogrammo primario addiderimus rhombum, cujus latus duplum est partis desectae $AE$, et cujus anguli iidem sunt, quos habet parallelogrammum primarium.

Porro est

$$E'F'G'H' - EFGH = (m + n)\, 2\, pq \sin\beta.$$

Ponamus $mp = nq$, erit

$$E'F'G'H' - EFGH = nq\,.\,(p + q)\, 2 \sin\beta.$$

h. e. Differentia ejusmodi parallelogrammorum pendet a valore partis desectae $AE$.

*Corollarium* 1. Si in formula, quae aream parallelogrammi $EFGH$ exhibet, ponamus, esse $m = \frac{1}{2}$, $n$ vero habere quemlibet valorem finitum, semper erit

$$EFGH = \tfrac{1}{2}\, pq \sin\beta = \tfrac{1}{2}\, ABCD.$$

*Corollarium* 2. Ex eadem formula videre possumus, quaenam partes proportionales a lateribus parallelogrammi desecandae sint, ut $EFGH$ aequale sit $ABCD$. Erit haud dubie $EFGH = ABCD$, si ponamus

$$(1 - 2m)\,.\,(1 - 2n) = 1,$$

unde sequitur

$$m = \frac{n}{2n - 1}.$$

Jam ponamus $m = 1$, erit $n = 1$; $m = \frac{1}{3}$, erit $n = -1$ etc.

*Corollarium* 3. Si ponamus $mp = nq = \frac{p + q}{2}$, erit $(1 - 2m)\,p = -\,q$ et $(1 - 2n)\,q = -\,p$, unde sequitur

$$EFGH = (pq + pq)\, \tfrac{1}{2} \sin\beta = ABCD,$$

h. e. Si a lateribus parallelogrammi desecantur partes, quarum quaeque aequalis est dimidiatae summa duorum laterum parallelogrammi inaequalium, efficitur, si fines illarum partium jungimus rectis, parallelogrammum, quod aequale est parallelogrammo primario.

*Corollarium* 4. Si in formula $[1 + (1-2m) \cdot (1-2n)] \cdot \frac{1}{2}\, pq \sin\beta$ ponamus $(1-2m) \cdot (1-2n) = -1$, erit $EFGH = o$, h. e. vertices omnium figurae angulorum in eadem linea recta positi sunt. Quod quidem ut fiat facile effici potest hujus aequationis ope

$$m = \frac{n-1}{2n-1}.$$

Ponamus enim $m = \frac{1}{3}$, erit $n = 2$; $m = \frac{1}{4}$, erit $n = \frac{3}{2}$ etc.

§. 48.

Jam desecemus inde a duobus angulis oppositis parallelogrammi $ABCD$ easdem partes proportionales, quas supra inde ab omnibus angulis desecuimus, ita ut sit $CG : GD = AE : BE = m : (1-m)$ et $CK : KB = AJ : JD = n : (1-n)$, erit, quod facile demonstrari potest, $EKGJ$ parallelogrammum. Cujus quidem parallelogrammi area est

$$EKGJ = [\, pq + (1-2m)\, p \cdot (2n-1)\, q \,]\ \tfrac{1}{2} \sin\beta,$$
$$= [\, 1 - (1-2m) \cdot (1-2n)]\ \tfrac{1}{2}\, pq \sin\beta.$$

Est vero

$$EFGH = [\, 1 + (1-2m) \cdot (1-2n) \,]\ \tfrac{1}{2}\, pq \sin\beta,$$

ergo

$$EFGH + EKGI = pq \sin\beta = ABCD.$$

Habemus igitur hanc propositionem: *Si a lateribus parallelogrammi cujusdam cum inde ab omnibus angulis eodem ordine sumtis, tum inde a duobus angulis oppositis easdem partes proportionales desecamus et fines partium desectarum rectis jungimus, efficiuntur duo parallelogramma, quorum summa aequalis est parallelogrammo primario.*

Porro est

$$EFGH - EKGI = (1-2m) \cdot (1-2n) \cdot pq \sin\beta.$$

Jam ponamus $mp = nq = \frac{p+q}{2}$, erit $(1-2m).(1-2n)pq = pq$, ergo

$$EFGH - EKGI = pq \sin\beta = ABCD.$$

Quum vero ex antecedentibus notum sit, esse $EFGH = ABCD$ si $mp = nq = \frac{p+q}{2}$, inde sequitur, ut $EKGI$ sit $= 0$.

Habemus igitur hanc propositionem: *Si inde ab angulis parallelogrammi cujuspiam oppositis desecantur laterum partes, quarum quaeque aequalis est dimidiae summae duorum laterum parallelogrammi inaequalium, harum desectarum partium fines in eadem recta positi sunt.*

## §. 49.

*Si inde ab angulorum verticibus trianguli cujuspiam laterum partes desecueris, singulis lateribus, ad quae pertinent, proportionales, et desectarum partium fines rectis conjunxeris, habebis triangulum, quod cum triangulo primario idem habet gravitatis centrum.*

Si (fig. 11.) $BD : DC = CE : AE = AF : FB$, triangulis $ABC$ et $DEF$ idem erit gravitatis centrum.

Jam ponamus $B$ esse coordinatarum initium, pars primi axis $BC = p$, pars secundi axis $BA = q$ *), $BD = np$. Habemus haud dubie

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = \frac{p}{3} \\ y_{,} = \frac{q}{3} \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle ABC.$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = np \\ y' = o \end{array}\right\} \text{c. D.} \quad \left.\begin{array}{l} x'' = (1-n)p \\ y'' = nq \end{array}\right\} \text{c. E.} \quad \left.\begin{array}{l} x''' = o \\ y''' = (1-n)q \end{array}\right\} \text{c. F.}$$

*) In sequentibus verticem anguli $B$ in omnibus, quae contemplabimur, triangulis esse coordinatarum initium ponemus, simulque partes coordinatarum axium $BA$ et $BC$ per $q$ et $p$ significabimus. Deinde coordinatas $x'$, $y'$ puncti cujusdam $A$ hoc modo $\left.\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array}\right)$ c. $A$., puncti vero coordinatas $x$, $y$, quod est centrum gravitatis trianguli cujuspiam $ABC$, hoc modo $\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right)$ c. g. $\triangle ABC$ significabimus.

ergo

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x'+x''+x'''}{3}=\frac{np+(1-n)p}{3}=\frac{p}{3}=x_{1}\\ \frac{y'+y''+y'''}{3}=\frac{nq+(1-n)q}{3}=\frac{q}{3}=y_{1}\end{array}\right\}\text{c. g. }\triangle DEF.$$

unde recte habere quod contendimus perspicitur.

Fx ipsa demonstratione patet $n$ quemlibet valorem habere posse.

## §. 50.

Si partes proportionales a lateribus trianguli non ipsis sed productis desecamus, coordinatas, quae ad desectarum partium fines pertinent, habemus, si pro $n$ ponimus $-n$. Sit triangulum, quod hac desecandi ratione efficitur $D'E'F'$, erunt.

$$\text{c. g. }\triangle D'E'F'\left\{\begin{array}{l}\frac{y'+y''+y'''}{3}=\frac{-nq+(1+n)q}{3}=\frac{q}{3}=x_{1}\\ \frac{x'+x''+x'''}{3}=\frac{-np+(1+n)p}{3}=\frac{p}{3}=y_{1}\end{array}\right.$$

unde patet triangulis $ABC$ et $D'E'F'$ idem esse gravitatis centrum.

## §. 51.

Quod modo de triangulis dictum est, idem de polygonis dici potest. Siquidem datum est polygonum (fig. 12.) ABCDE cujus latera ita sunt divisa, ut

$$AF:FB=BG:GC=CH:HD=DI:IE=EK:KA=m:(1-m)$$

et junguntur puncta $F, G, H, I, K$, rectis, efficitur polygonum $FGHIK$, cui idem est gravitatis centrum, quod habet datum polygonum $ABCDE$.

Sint

$$\left.\begin{array}{l}x'\\ y'\end{array}\right\}\text{c. A};\ \left.\begin{array}{l}x''\\ y''\end{array}\right\}\text{c. B};\ \left.\begin{array}{l}x'''\\ y'''\end{array}\right\}\text{c. C};\ \left.\begin{array}{l}x^{IV}\\ y^{IV}\end{array}\right\}\text{c. D};\ \left.\begin{array}{l}x^{V}\\ y^{V}\end{array}\right\}\text{c. E};$$

erunt coordinatae puncti, quod est centrum gravitatis polygoni $ABCDE$,

$$x_{1}=\frac{x'+x''+x'''+x^{IV}+x^{V}}{5};\quad y_{1}=\frac{y'+y''+y'''+y^{IV}+y^{V}}{5};$$

porro (§. 19.)

$$\left.\begin{array}{l} {}'x = m x'' + (1-m)x' \\ {}'y = m y'' + (1-m)y' \end{array}\right\} \text{c. F}; \quad \left.\begin{array}{l} {}''x = m x''' + (1-m)x'' \\ {}''y = m y''' + (1-m)y'' \end{array}\right\} \text{c. G};$$

$$\left.\begin{array}{l} {}'''x = m x^{iv} + (1-m)x''' \\ {}'''y = m y^{iv} + (1-m)y''' \end{array}\right\} \text{c. H}; \quad \left.\begin{array}{l} {}^{iv}x = m x^{v} + (1-m)x^{iv} \\ {}^{iv}y = m y^{v} + (1-m)y^{iv} \end{array}\right\} \text{c. I}; \quad \left.\begin{array}{l} {}^{v}x = m x' + (1-m)x^{v} \\ {}^{v}y = m y' + (1-m)y^{v} \end{array}\right\} \text{c. K};$$

ergo coordinatae puncti, quod est centrum gravitatis polygoni FGHIK

$$\frac{(1-m)x' + mx' + (1-m)x'' + mx'' + (1-m)x''' + mx''' + (1-m)x^{iv} + mx^{iv} + (1-m)x^{v} + mx^{v}}{5}$$

$$= \frac{x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^{v}}{5} = x_1 ,$$

et eodem modo

$$\frac{y' + y'' + y''' + y^{iv} + y^{v}}{5} = y_1 .$$

## §. 52.

Jam quaeramus coordinatas punctorum, quae sunt centra gravitatis triangulorum *BDF*, *CED*, *AEF*, (fig. 11.).

Habebimus

$$\left.\begin{array}{l} y^{iv} = \dfrac{q + (1-n)q + nq}{3} = \dfrac{2}{3}q \\ x^{iv} = \dfrac{1-n}{3}p \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle AFE. \quad (\mathfrak{A})$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{v} = \dfrac{1-n}{3}q \\ x^{v} = \dfrac{n}{3}p \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle BDF. \quad (\mathfrak{B})$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{vi} = \dfrac{n}{3}q \\ x^{vi} = \dfrac{2}{3}p \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle CED. \quad (\mathfrak{C})$$

Ex his sequitur,

*a*) ut distantia, qua remotum sit centrum gravitatis trianguli *AFE* ab axe abscissarum, aequalis sit duplici distantiae, qua ab eodem axe remotum sit

centrum gravitatis trianguli primarii, nam horum punctorum ordinatae rationem habent 2 : 1;

b) ut distantia, qua remotum sit ab ordinatarum axe centrum gravitatis trianguli *CED*, aequalis sit duplici distantia, quae ab eodem axe remotum sit centrum gravitatis trianguli primarii;

c) ut distautia, qua centrum gravitatis trianguli *BDF* remotum sit a recta *AC*, aequalis sit duplici distantiae, qua remotum sit ab eadem recta centrum gravitatis trianguli primarii.

Itaque habemus hanc propositionem: *Si inde ab angulo trianguli cujusdam amborum laterum hunc angulum comprehendentium ejusmodi partes desecamus, ut sit, si latera ipsa per* a *et* b *significamus, altera harum partium in latere* a *desecta* = na, *altera vero* = (1 — n) b, *et fines utriusque partis recta jungimus, efficitur triangulum, cujus centrum gravitatis distantiam habet a tertio trianguli latere, quae est duplum distantiae, qua ab eodem latere remotum est centrum gravitatis trianguli primarii.*

Porro si $BG = nAB = nq$ (Fig. 11.) erunt $y' = \frac{n}{3}q$, $x' = \frac{n}{3}p$ e. g. $\triangle BDG$; quum vero abscissa gravitatis centri trianguli BDF sit $= \frac{n}{3}p$, habemus hanc propositionem: *Si trianguli lateris* a *inde ab anguli vertice partem desecamus* = n a *et ab eodem angulo lateris alterius* b *partes* n b *et* (1 — n) b, *et jungimus fines partium* n b *et* (1 — n) b *cum fine partis* n a *lineis rectis, efficiuntur duo triangula, quorum gravitatis centra in recta, alteri lateri b parallela, posita sunt.*

Denique ex antecedentibus patet, si jungantur centra gravitatis triangulorum *AEF*, *BDF*, *CDF*, effici triangulum, cui idem sit gravitatis centrum, quod habeant triangula *ABC* et *DEF*.

§. 53.

Jam vertamus nos ad contemplationem triangulorum, quae efficiuntur si partes laterum trianguli non ipsorum sed productorum desecamus. Quum

fines harum partium posuerimus $D'$, $E'$, $F'$, facillime inveniemus in aequationibus (A) (B) (C) $n$ in $-n$ mutando:

$$\left.\begin{aligned} y^{vii} &= \frac{2}{3}\,q \\ x^{vii} &= \frac{1+n}{3}\,p \end{aligned}\right\}\ \text{c. g. } \triangle\, AE'F' \quad (\mathfrak{D})$$

$$\left.\begin{aligned} y^{viii} &= \frac{(1+n)}{3}\,q \\ x^{viii} &= -\frac{n}{3}\,p \end{aligned}\right\}\ \text{c. g. } \triangle\, BD'F' \quad (\mathfrak{E})$$

$$\left.\begin{aligned} y^{ix} &= -\frac{n}{3}\,q \\ x^{ix} &= \frac{2}{3}\,p \end{aligned}\right\}\ \text{c. g. } \triangle\, CE'D' \quad (\mathfrak{F})$$

Quia $y^{iv} = y^{vii} = \frac{2}{3}\,q$, videmus centra gravitatis triangulorum $AEF$ et $AE'F'$ posita esse in recta axi primo parallela; ergo idem valere de distantia, qua gravitatis centrum trianguli $AE'F'$ ab axe abscissarum remotum sit, quod supra de gravitatis centro trianguli $AEF$ dictum est, satis apparet. Itaque habemus hanc propositionem: *Si inde a finibus duorum trianguli laterum non communibus in lateribus et ipsis, et productis quaelibet partes proportionales desecantur et fines partium, eadem desecandi ratione ortarum, rectis junguntur, duo triangula efficiuntur, quorum centra gravitatis in recta sunt posita tertio trianguli lateri parallela, cujus distantia ab eodem latere duplum est distantiae, qua ab illo latere remotum est recta, quae centrum gravitatis trianguli primarii transit et eidem lateri parallela est.*

Est $\frac{x^{iv} + x^{vii}}{2} = \frac{p}{3}$, h. e. ordinata, quae pertinet ad centrum gravitatis trianguli primarii, satis producta rectam, quae centra gravitatis ejusmodi triangulorum, qualia sunt $AEF$ et $AE'F'$, jungit, in duas partes aequales dividit.

Habemus

$$\left.\begin{array}{l} y' = nq \\ x' = (1-n)\,p \end{array}\right\} \text{c. E}; \left.\begin{array}{l} y'' = (1-n)\,q \\ x'' = o \end{array}\right\} \text{c. F}; \left.\begin{array}{l} 'y = -nq \\ 'x = (1+n)\,p \end{array}\right\} \text{c. E}'; \left.\begin{array}{l} ''y = (1+n)q \\ ''x = o \end{array}\right\} \text{c. F}';$$

ergo coordinatae puncti, in quo recta $EF$ in duas partes aequales dividitur, sunt $x''' = \frac{(1-n)}{2}p$, $y''' = \frac{q}{2}$; coordinatae vero puncti, in quo $E'F'$ in duas partes aequales dividitur, $'''x = \frac{1+n}{2}p$, $'''y = \frac{q}{2}$. Inde autem apparet, et hoc punctum, in quo recta $E'F'$, et illud, in quo linea $EF$ in duas aequales partes dividatur, jacere in recta primo axi parallela, quae simul punctum transeat, in quo recta $AC$ quoque in duas partes aequales secetur, sive, ut eandem rem alio modo exprimamus, puncta, in quibus rectae $EF$, $AC$ et $E'F'$ in duas partes aequales dividantur, in eadem recta esse posita, quam rectis $EF$ et $E'F'$ finitam recta $AC$ in duas partes aequales dividat.

Facile perspicitur, idem valere et de lineis $DF$, $AB$ et $D'F'$, et de lineis $DE$, $BC$ et $D'E'$. Itaque habemus hanc propositionem: *Si duorum trianguli laterum et ipsorum et productorum inde a finibus, qui lateribus non sunt communes, desecantur quaecunque partes proportionales, et puncta, cum hac, tum illa desecandi ratione data, rectis junguntur, puncta, in quibus ipsae hae rectae et quod inter eas positum est trianguli latus bifariam secantur, in eadem posita sunt recta, quae ipso trianguli latere in duas partes aequales secatur.*

Si junguntur centra gravitatis triangulorum $AEF''$, $BDF''$, $CD'E'$, efficitur triangulum, cui idem est gravitatis centrum, quod habent triangula $ABC$, $DEF$ et $D'E'F'$. Nam habemus

$$\left.\begin{array}{l} y' = \frac{2}{3}q \\ x' = \frac{1+n}{3}p \end{array}\right\} \text{c. g.} \triangle BEF'; \left.\begin{array}{l} y'' = \frac{1+n}{3}q \\ x'' = -np \end{array}\right\} \text{c. g.} \triangle BD'F'; \left.\begin{array}{l} y''' = -\frac{n}{3}q \\ x''' = \frac{2}{3}p \end{array}\right\} \text{c. g.} \triangle CD'E';$$

ergo

$$\frac{y' + y'' + y'''}{3} = \frac{q}{3}; \quad \frac{x' + x'' + x'''}{3} = \frac{p}{3}$$

§. 54.

Si laterum trianguli $ABC$ (fig. 13.) inde ab angulis $A$, $B$, $C$ desecantur partes $AF = nAB, BD = nBC, CE = nAC$ et puncta $D, E, F$ rectis junguntur $AD$, $BE$, $CF$ cum verticibus angulorum lateribus oppositorum, his rectis efficitur triangulum $GHI$, cui cum triangulo primario idem est gravitatis centrum.

Quaeramus coordinatas punctorum $I, G, H$ aequationum ope, quae exhibent rectas $AD, CF$ et $DE$. Est vero $AD$

$$y = -\frac{q}{np}x + q$$

$CF$

$$y = -\frac{1-n}{p}qx + (1-n)q,$$

$BE$

$$y = \frac{n}{1-n} \cdot \frac{q}{p}x.$$

Ex his aequationibus invenimus

$$\left.\begin{aligned} x^{\prime} &= \frac{n^2}{1-n+n^2}p \\ y^{\prime} &= \frac{(1-n)^2}{1-n+n^2}q \end{aligned}\right\} \text{c. I}; \quad \left.\begin{aligned} x^{\prime\prime} &= \frac{n.(1-n)}{1-n+n^2}p \\ y^{\prime\prime} &= \frac{n^2}{1-n+n^2}q \end{aligned}\right\} \text{c. G}; \quad \left.\begin{aligned} x^{\prime\prime\prime} &= \frac{(1-n)^2}{1-n+n^2}p \\ y^{\prime\prime\prime} &= \frac{n(1-n)}{1-n+n^2}q \end{aligned}\right\} \text{c. H.}$$

ergo

$$\frac{y^{\prime}+y^{\prime\prime}+y^{\prime\prime\prime}}{3} = \frac{(1-n)^2+n^2+n(1-n)}{3(1-n+n^2)}q = \frac{q}{3}$$

$$\frac{x^{\prime}+x^{\prime\prime}+x^{\prime\prime\prime}}{3} = \frac{n^2+n(1-n)+(1-n)^2}{3(1-n+n^2)}p = \frac{p}{3}$$

unde quod contendimus apparet.

Propositio modo prolata etiam recte habet, si partes lateribus proportionales non a lateribus ipsis, sed productis desecamus.

§. 55.

Jam exquiramus coordinatas punctorum, quae sunt centra gravitatis triangulorum $AFI$, $BDG$, $CEH$. Habebimus

$$\left.\begin{array}{l} y'' = \frac{3-5n+4n^2-n^3}{3(1-n+n^2)}q \\ x'' = \frac{n^2}{3(1-n+n^2)}p \end{array}\right\} \text{c.g. } \triangle AFI.$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{v} = \frac{n^2}{3(1-n+n^2)}q \\ x^{v} = \frac{2n-2n^2+n^3}{3(1-n+n^2)}p \end{array}\right\} \text{c.g. } \triangle BDG.$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{vi} = \frac{2n-2n^2+n^3}{3(1-n+n^2)}q \\ x^{vi} = \frac{3-5n+4n^2-n^3}{3(1-n+n^2)} \end{array}\right\} \text{c.g. } \triangle CEH.$$

Ex his intelligitur,

*a*) finem ordinatae puncti, quod est gravitatis centrum trianguli *AFI* cum fine abscissae puncti, quod est gravitatis centrum trianguli *CEH* in recta lineae *AC* parallela esse positum;

*b*) idem dici posse de ordinata puncti, quod est gravitatis centrum trianguli *BDG* et de abscissa puncti, quod gravitatis centrum est trianguli *AFI*.

*c*) idem valere de ordinata centri gravitatis, quod est in triangulo *CEH* et de abscissa centri gravitatis, quod habet triangulum *BDG*.

Si deinceps coordinatarum axes esse ponimus *BC* et *BA*, *AB* et *AC*, *CA* *CB*, singulae sub *a*, *b*, et *c*, prolatae relationes ad unam revocantur, h. e. *a*) in *b*) et *c*), *b*) in *a*) et *c*), *c*) in *a*) et *b*) tránsit, unde sequitur, ut recte habeant hae propositiones:

1) Si per gravitatis centra duorum triangulorum, qualia sunt *AEI*, *CEH* et *BDG* rectae ita ducuntur, ut sint parallelae iis trianguli primarii lateribus, quibus incidant transversae, quarum partes superiores latera sunt horum triangulorum, et ut altera rectarum secet id trianguli primarii latus, cui altera sit parallela: puncta, in quibus ipsae hae rectae ambo trianguli primarii latera secant, in recta sunt posita tertio trianguli lateri parallela.

2) Idem videmus, si per centra gravitatis duorum ejusmodi triangulorum rectae ita ducuntur, ut iis trianguli primarii lateribus sint parallelae, quorum partes horum triangulorum sint latera, et ut altera rectarum id trianguli primarii latus secet, cui altera sit parallela.

3) Res non aliter se habet, si per centra gravitatis duorum ejusmodi triangulorum rectae ita ducuntur, ut iis trianguli primarii lateribus sint parallelae, quorum partes non sint triangulorum illorum latera, et quibus non incidant transversae, quarum superiores partes triangulorum latera exhibent, et ut altera rectarum id trianguli primarii latus secet, cui altera sit parallela.

Ex antecedentibus facile etiam perspicitur, si gravitatis centra triangulorum $AFI$, $BDG$ et $CEH$ rectis jungantur, triangulo, quod hoc modo efficiatur, idem esse centrum gravitatis, quod habeat triangulum primarium.

§. 56.

Habemus

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{q}{3} \\ x' &= \frac{n}{3}p \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle ABD; \qquad \left.\begin{aligned} y'' &= \frac{n}{3}q \\ x'' &= \frac{2-n}{3}p \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle BCE.$$

$$\left.\begin{aligned} y''' &= \frac{2-n}{3}q \\ x''' &= \frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle ACF; \qquad \left.\begin{aligned} y^{IV} &= \frac{q}{3} \\ x^{IV} &= \frac{1+n}{3}p \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle ACD.$$

$$\left.\begin{aligned} y^{V} &= \frac{1+n}{3}q \\ x^{V} &= \frac{1-n}{3}p \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle BEA; \qquad \left.\begin{aligned} y^{VI} &= \frac{1-n}{3}q \\ x^{VI} &= \frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. g. } \triangle CFB.$$

Ergo gravitatis centra triangulorum $ABD$ et $ADC$ posita sunt in recta, quae parallela est rectae $BC$ simulque transit centrum gravitatis trianguli primarii. In una eademque recta igitur posita sunt centra gravitatis triangulorum $ADB$, $ADC$ et $ABC$, porro; quod per se apparet, triangulorum

*BEC*, *BEA* et *ABC*; *CFA*, *CFB* et *ABC*; prima harum linearum parallela est rectae *BC*, secunda rectae *AC*, tertia rectae *AB*.

Quia recte habet, quod diximus, quicunque est valor quantitatis *n*, hanc propositionem proferre licet: Si triangulum recta transversa in duas quaslibet partes dividitur, centra utriusque trianguli, quae hoc modo efficiuntur, cum centro gravitatis trianguli primarii in linea recta jacent, quae ei trianguli lateri parallela est, quod in duas partes est divisum.

Recta igitur, quae centra gravitatis ejusmodi triangulorum jungit, cum transversa, qua triangulum in duas partes dividitur, eundem angulum comprehendit, quem includit eadem transversa cum eo, quod dividit, trianguli primarii latere.

Ex his facile perspicitur, quomodo solvi possit *problema, ex quo postulatur, ut triangulum datum in duas dividatur partes, quae ita comparatae sint, ut recta, quae harum partium gravitatis centra jungat, cum linea, qua triangulum sit divisum, certae magnitudinis angulum comprehendat.* Nam quaeque transversa, sub angulo dato ad latus subjectum ducta, triangulum eo quem volumus modo dividit *).

Si gravitatis centra triangulorum *ABD*, *BEC* et *CAF* rectis junguntur, triangulo inde orto idem est gravitatis centrum, quod habet triangulum primarium.

Idem valet de gravitatis centris triangulorum *ACD*, *BEA* et *CFB*.

Idem de gravitatis centris triangulorum *ABG*, *BCH*, *CAI*.

Idem de gravitatis centris triangulorum *AGE*, *BHI*, *ICD*.

Idem denique de centris gravitatis tetragonorum *BEIG*, *GDCH*, *AEHI* et *BDIF*, *DCGG*, *CHFA*.

*) Idem problema breve ante tempus propositum erat in libro „Annales des Mathematiques etc. par Gergonne. Tom XXI. p. 188.“ Ibi tamen illud problema arctioribus finibus erat inclusum; nam de ea tantum dividendi ratione quaestio erat, qua efficerentur duae dati trianguli partes, quarum centra gravitatis ita essent posita, ut quae recta centra gravitatis jungeret cum recta, qua divideretur triangulum, angulum rectum comprehenderet. Quod quidem problema triplici modo solvi posse, ex antecedentibus patet. Simili plane modo alterum problema solvi potest, quod eodem loco legitur et ad tetraedrum spectat.

§. 57.

Si inde ab angulorum verticibus trianguli $ABC$ (Fig. 14.) ejusmodi laterum partes desecantur, ut $BD = nBC$, $CE = 2nAC$, $AF = 3nAF$, habemus

$$\left.\begin{array}{l} y' = o \\ x' = np \end{array}\right\} \text{c. D;}\quad \left.\begin{array}{l} y'' = 2nq \\ x'' = (1\text{-}2n)p \end{array}\right\} \text{c. E;}\quad \left.\begin{array}{l} y''' = (1\text{-}3n)q \\ x''' = \quad o \end{array}\right\} \text{c. F.}$$

ergo coordinatae puncti, quod gravitatis centrum est trianguli $DEF$,

$$y^{\text{IV}} = \frac{1-n}{3}\,q,\; x^{\text{IV}} = \frac{1-n}{3}\,p\,.$$

Inde sequitur,

*a*) ut fines coordinatarum $y^{\text{IV}}$, $x^{\text{IV}}$ in recta, quae rectae $AC$ sit parallela, jaceant;

*b*) ut gravitatis centrum trianguli $DEF$ et gravitatis centrum trianguli, cujus latera $(1-n)\,q$ et $(1-n)\,p$ angulum coordinatarum comprehendant, puncta non sint diversa.

Aequatio rectae, quae initium coordinatarum transit simulque trianguli latus, coordinatarum angulo subjectum, in duas partes aequales dividit, haec est

$$y\,.\,\frac{p}{2} - x\,.\,\frac{q}{2} = o$$

sive

$$y = \frac{q}{p}\,x;$$

Si in hac aequatione pro $x$ valorem ponimus, quem habet $x^{\text{IV}}$, habemus

$$y = \frac{q}{p}\cdot\frac{1-n}{3}\,p = \frac{1-n}{3}\,q = y^{\text{IV}}$$

h. e. gravitatis centrum trianguli $DEF$, quod per $S'$ significare volumus, in recta, quod initium coordinatarum simulque centrum gravitatis trianguli primarii transit, positum est.

Si lineae $BS$, cujus fines initium coordinatarum et centrum gravitatis trianguli primarii $S$, inde a puncto $S$ partem desecamus, quae est $= nBS$, coordinatae puncti, quo haec pars desecatur, sunt

$$y = \frac{1-n}{3}\,q;\quad x = \frac{1-n}{3}\,p,$$

quae sunt coordinatae puncti $S'$. Linea $SS'$ igitur est $= nBS$.

## §. 58.

Si non $B$, sed $A$ initium desecandi ponimus, ita quidem, ut faciamus $AI = n \,.\, AB$, $BK = 2nBC$, $CE = 3nAC$, habemus

$$\left.\begin{array}{l} y' = (1-n)\,q \\ x' = o \end{array}\right\}\text{ c. I;}\quad \left.\begin{array}{l} y'' = o \\ x'' = 2np \end{array}\right\}\text{ c. K;}\quad \left.\begin{array}{l} y''' = 3nq \\ x''' = (1-3n)\,p \end{array}\right\}\text{ c. L;}$$

ergo coordinatae centri gravitatis, quod pertinet ad triangulum $IKL$, quodque per $S''$ significamus,

$$y^{v} = \frac{1+2n}{3}\,q;\quad x^{v} = \frac{1-n}{3}\,p.$$

Utrumque igitur gravitatis centrum $S'$ et $S''$ positum est in recta axi secundo $AB$ parallela.

Porro est aequatio rectae, quae transit punctum $A$ simulque id punctum, quod $BC$ in duas partes aequales dividit, est

$$y = -\frac{2q}{p}\,x + .q$$

Si in hac aequatione pro $x$ substituimus $x^{v}$, ea hanc formam induit

$$y = -\frac{2q}{p}\cdot\frac{1-n}{3}\,p + q = \frac{1+2n}{3}\,q = y^{v};$$

h. e. centrum gravitatis $S''$ in eadem recta, quae punctum $A$ simulque id punctum transit, quod $BC$ in duas partes aequales dividit, sive $S''$ jacet in recta, quae punctum $A$, a quo singulas partes desecare incepimus, cum centro gravitatis trianguli primarii conjungit.

Si desecatur inde a $S$ pars rectae $AS = nAS$, coordinatae puncti, quo $AS$ ita secatur, sunt

$$y = (1-n) \cdot \frac{q}{3} + nq = \frac{1+2n}{3}\, q = y^{\text{v}},$$

$$x = (1-n) \cdot \frac{p}{3} + o = \frac{1-n}{3}\, p = x^{\text{v}};$$

h. e. linea $SS''$ est $= nAS$.

§. 59.

Siquidem eandem desecandi rationem retinemus, sed inde ab angulo $C$ desecare incipimus, ita ut $CM = nCA$, $AN = 2n \cdot AB$, $BO = 3n \cdot BC$, habemus coordinatas puncti, quod centrum est gravitatis trianguli $MNO$, quodque per $S'''$ significamus

$$y^{\text{vi}} = \frac{1-n}{3}\, q;\ x^{\text{vi}} = \frac{1+2n}{3}\, p.$$

Ergo $S'$ et $S'''$ in recta axi primo parallela posita sunt.

Porro $S'''$ positum est in recta, quae desecandi initium $C$ et gravitatis centrum trianguli primarii transit, simulque ipsius rectae $SC$ partem desecat $= n \cdot SC$.

Facile demonstrari potest esse $S''S''' \parallel BC$:

Si quae in hac et utraque proxime antecedente paragrapho diximus in unam propositionem revocare volumus, haec erit: *Si inde a gravitatis centro trianguli cujusdam lineae rectae, quae idem gravitatis centrum cum angulo quodam trianguli jungit, ejusmodi partem desecamus, ut sit ipsius rectae nplum, finis hujus partis erit gravitatis centrum trianguli, quod efficitur, si conjungimus fines linearum a trianguli lateribus desectarum, quarum prima, inde ab angulo, cum centro gravitatis conjuncto, abscissa, est nplum trianguli lateris, in quo posita est, secunda deinde, eodem ordine desecta, est lateris, in quo jacet, 2nplum, tertia denique tertii lateris 3nplum.*

Ceterum per se apparet, duo triangula semper construi posse ea quam diximus ratione; alterum si a certo trianguli primarii angulo ad dextrum latus, alterum si ad sinistrum latus desecare incipimus.

§. 60.

Jam exquiramus, quae sit area triangulorum $S'S''S''$, $SS'S''$, $SS''S'''$, $SS'S'''$.

Est (§. 32).

$$\Delta S'S''S''' = [x''(y'''-y')+x'''(y'-y'')+x'(y''-y''')].\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$
$$=\left[\frac{1-n}{3}p.-\frac{3nq}{3}+\frac{1+n2}{3}p.\frac{3n}{3}q\right].\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$
$$=\tfrac{1}{2}pq.\sin\beta.\tfrac{1}{9}.9n^2=n^2.\Delta;$$

h. e. invenitur area trianguli $S'S''S'''$, si triangulum primarium per $n^2$ multiplicatur.

$$\Delta SS'S'' = \left[\frac{1-n}{3}.-\frac{2n}{3}q+\frac{p}{3}.\frac{3n}{3}q+\frac{1-n}{3}p.-\frac{n}{3}q\right]\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$
$$=\tfrac{1}{3}n^2.\tfrac{1}{2}\sin\beta\, pq=\tfrac{1}{3}n^2\,\Delta=\tfrac{1}{3}\,\Delta S'S''S'''.$$
$$\Delta SS''S''' = \left[\frac{1+2n}{3}p.\frac{2n}{3}q+\frac{1-n}{3}p.\frac{n}{3}q+\frac{p}{3}.-\frac{3n}{3}q\right].\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$
$$=\tfrac{1}{3}n^2.\tfrac{1}{2}pq\sin\beta=\tfrac{1}{3}\,\Delta S'S''S'''.$$

Ergo $\Delta SS'S'' = \Delta SS''S''' = \Delta SS'S''' = \tfrac{1}{3}\,\Delta S'S''S'''$.

Inde sequitur, ut triangulo $S'S''S'''$ idem sit gravitatis centrum, quod habeat triangulum primarium.

§. 48.

Si easdem partes trianguli laterum, $n$plum, $2n$plum, $3n$plum, non a lateribus ipsis, sad productis desecamus, etiam tria efficiuntur triangula, quae, apte per $D'E'F'$, $J'K'L'$, $M'N'O'$ significantur et quorum $D'E'F'$ oritur, si $B$ est desecandi initium, $I'K'L'$, si $A$, $M'N'O'$, si $C$; gravitatis centra horum triangulorum significare volumus per $'S$ $''S$ $'''S$. Ut inveniamus coordinatas puncti $'S$, hoc tantum opus est, ut in formulis, quae exhibent coordinatas,

ad centrum gravitatis trianguli *DEF* pertinentes, $n$ mutemus in $-n$. Habemus igitur

$$\left.\begin{array}{l} y'' = \frac{1+n}{3}q \\ x'' = \frac{1+n}{3}p \end{array}\right\} \text{c. } 'S$$

Punctum $'S$ igitur etiam est gravitatis centrum trianguli, quod efficitur, si inde a $B$ productorum laterum $BC$ et $BA$ partes desecamus, quae sunt $n.BC$ et $n.BA$, et fines harum linearum recta conjungimus.

Est $\frac{''y+y''}{2} = \frac{q}{3}$; $\frac{''x+x''}{2} = \frac{p}{3}$;

h. e. si utrumque punctum $S'$ et $'S$ recta junguntur punctum illud, in quo ipsa haec recta in duas partes aequales dividitur, gravitatis centrum est trianguli primarii.

Quum jam cognitum sit, punctum $S'$ in recta positum esse, quae punctum $B$ et gravitatis centrum trianguli primarii transit, punctum $'S$ quoque in hac recta jaceat necesse est. Invenitur punctum $'S$, si rectam $BS$ usque ad $G$ producimus et ab inferiore ejus parte $GS$ inde a puncto $S$ lineam, quae est $2n.GS$, desecamus.

Rem plane eandem esse, si ponimus, $A$ vel $C$ esse desecandi initia, facile colligitur. Inde efficitur, recte habere hanc propositionem: *Si in triangulo quopiam angulorum vertices junguntur cum punctis, quae latera in duas partes aequales dividunt, simulque in inferiori parte unius harum transversarum inde a puncto, in quo eae sibi incidunt desecatur linea, quae est 2nplum hujus inferioris partis, finis hujus lineae gravitatis centrum est trianguli, quod efficitur, si in productis trianguli lateribus inde ab anguli vertice, quem transit recta, in qua gravitatis centrum novi trianguli jacet, eodem ordine desecamus lineas, quarum prima est lateris primi nplum, secunda lateris secundi 2nplum, tertia lateris tertii 3nplum.*

Trianguló $'S''S'''S$ idem est gravitatis centrum, quod habet triangulum primarium.

## §. 62.

Jam videamus de areis triangulorum $'S''S'''S$, $S'S''S$, $S''S'''S$, $S'S'''S$.

$$\triangle\ 'S''S'''S = \left[\frac{1+n}{3}p\cdot\left(\frac{1+n}{3}q - \frac{1-2n}{3}q\right) + \frac{1-2n}{3}p\cdot\left(\frac{1-2n}{3}q - \frac{1+n}{3}q\right)\right]\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta$$

$$= \tfrac{1}{9}\,pq\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\left[\,(1+n)\cdot 3n + (1-2n)\cdot -3n\right] = n^2\cdot\tfrac{1}{2}\,pq\sin\beta$$

$$= n^2\,\triangle = \triangle\ S'S''S'''.$$

$$\triangle\ S'S''S = \left[\frac{p}{3}\cdot -nq + \frac{1+n}{3}p\cdot\frac{n}{3}q + \frac{1+n}{3}p\cdot\frac{2n}{3}q\right]\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$

$$= \tfrac{1}{3}n^2\cdot\tfrac{1}{2}\,pq\sin\beta = \tfrac{1}{3}n^2\,\triangle = \tfrac{1}{3}\,\triangle\ 'S''S'''S.$$

$$\triangle\ S''S'''S = \left[\frac{p}{3}\cdot nq + \frac{1-2n}{3}p\cdot -\frac{2n}{3}q + \frac{1+n}{3}p\cdot -\frac{nq}{3}\right]\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta$$

$$= \tfrac{1}{3}n^2\,\triangle = \tfrac{1}{3}\,\triangle\ 'S''S'''S.$$

Ergo $\triangle\ S'S''S''' = \triangle\ 'S''S'''S$;

$$\triangle\ SS'S'' = \triangle\ SS''S''' = \triangle\ SS'S''' = \triangle\ S'S''S = \triangle\ S''S'''S$$

$$= \triangle\ S'S'''S = \tfrac{1}{3}n^2\,\triangle.$$

## §. 63.

Si partes aequales laterum trianguli cujusdam $ABC$ (Fig. 15.) eodem ordine desecamus, ita ut sit $BD = CE = AF$, habebimus si $BC = p$, $AB = q$, $AC = r$ et $BD = d$

$$\left.\begin{aligned} y' &= o \\ x' &= d \end{aligned}\right\}\text{ c. D};\quad \left.\begin{aligned} y'' &= \frac{q}{r}\,d \\ x'' &= \frac{p}{r}.(r-d) \end{aligned}\right\}\text{ c. E};\quad \left.\begin{aligned} y''' &= q-d \\ x''' &= o \end{aligned}\right\}\text{ c. F};$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ergo}\quad \frac{y'+y''+y'''}{3} &= \frac{q}{3} + \frac{q-r}{r}\cdot\frac{d}{3} = y^{\text{v}} \\ \frac{x'+x''+x'''}{3} &= \frac{p}{3} + \frac{p-r}{r}\cdot\frac{d}{3} = x^{\text{v}} \end{aligned}\right\}\text{ c. g. }\triangle\text{ DEF.}$$

Porro si easdem partes aequales in lateribus productis desecamus, $BD' = CE' = AF' = -d$, habemus

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\text{IV}}y = \frac{q}{3} - \frac{q-r}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ {}^{\text{IV}}x = \frac{p}{3} + \frac{p-r}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle\ D'E'F';$$

$$\text{ergo } \frac{{}^{\text{IV}}y + y^{\text{IV}}}{2} = \frac{q}{3}; \quad \frac{{}^{\text{IV}}x + x^{\text{IV}}}{2} = \frac{p}{3};$$

h. e. gravitatis centra utriusque trianguli $DEF$ et $D'E'F'$ una cum gravitatis centro trianguli primarii in eadem recta jacent eaque ab hoc aequidistant.

## §. 64.

Jam inverso ordine desecemus partes aequales, $BG = AH = CI = d$, habebimus

$$\left.\begin{array}{l} y' = d \\ x' = o \end{array}\right\} \text{c. G;} \quad \left.\begin{array}{l} y'' = \frac{q}{r} \cdot (r-d) \\ x'' = \frac{p}{r} \cdot d \end{array}\right\} \text{c. H;} \quad \left.\begin{array}{l} y''' = o \\ x''' = p-d \end{array}\right\} \text{c. I;}$$

ergo

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y' + y'' + y'''}{3} = \frac{q}{3} - \frac{q-r}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ \frac{x' + x'' + x'''}{3} = \frac{p}{3} + \frac{p-r}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{array}\right\} \text{c. g. } \triangle\ GHI,$$

unde perspicitur, triangulis $D'E'F'$ et $GHI$ idem esse gravitatis centrum.

Si quidem eodem ordine, sed a productis lateribus easdem partes aequales desecamus, triangulum $G'H'I'$, quod hoc modo efficitur, ut ex antecedentibus facile colligi potest, idem habet gravitatis centrum, quod pertinet ad triangulum $DEF$. Itaque recte habet haec propositio: *Si inde ab angulorum verticibus trianguli cujuspiam desecantur lineae aequales certo ordine in lateribus ipsis et ordine inverso in lateribus productis, et fines linearum, eadem desecandi ratione datarum, rectis junguntur, duo efficiuntur triangula, quae idem habent gravitatis centrum.*

§. 65.

Si ponamus, in triangulo *ABC* (Fig. 15.) esse $BD = d$, $CE = 2d$, $AF = 3d$, porro $BG = d$, $AH = 2d$, $CI = 3d$, habebimus, si centrum gravitatis trianguli *DEF* per $S'$, trianguli *GHI* per $'S$ significamus,

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{q}{3} + \frac{2q - 3r}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ x' &= \frac{p}{3} + \frac{r - 2p}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } S'; \qquad \left.\begin{aligned} 'y &= \frac{q}{3} + \frac{r - 2q}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ 'x &= \frac{p}{3} + \frac{2p - 3r}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } 'S;$$

unde habemus $\frac{'y + 'y}{2} = \frac{q - d}{3}$; $\frac{'x + x'}{2} = \frac{p - d}{3}$.

h. e. punctum, in quo recta, qua gravitatis centra triangulorum *DEF* et *GHI* junguntur, in duas partes aequales dividitur, gravitatis centrum est trianguli, quod efficitur, si in lateribus trianguli *AB* et *CB* inde a finibus utrique non communibus lineae desecantur $= d$, et fines linearum desectarum rectis junguntur.

Si easdem lineas rectas $d$, $2d$, $3d$, duplici modo etiam inde ab angulis *C* et *A* desecamus, et triangula quae hoc modo efficiuntur per $D'E'F'$ et $G'H'I'$, $D''E''F''$ et $G''H''I''$ et eorum centra gravitatis per $S''$ et $''S$, $S'''$ et $'''S$ significamus, habemus

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \frac{q}{3} + \frac{q - 2r}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ x'' &= \frac{p}{3} + \frac{3r - p}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } S''; \qquad \left.\begin{aligned} ''y &= \frac{q}{3} + \frac{2r - 3q}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ ''x &= \frac{p}{3} + \frac{3p - r}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } ''S;$$

$$\left.\begin{aligned} y''' &= \frac{q}{3} + \frac{3q - r}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ x''' &= \frac{p}{3} + \frac{2r - 3p}{r} : \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } S''; \qquad \left.\begin{aligned} '''y &= \frac{q}{3} + \frac{3r - q}{r} \cdot \frac{d}{3} \\ '''x &= \frac{p}{3} + \frac{p - 2r}{r} \cdot \frac{d}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } '''S;$$

ergo

$$\frac{y' + y'' + y'''}{3} = \frac{q}{3} + 2 . \frac{q - r}{r} \cdot \frac{d}{3} = y_{,},$$

$$\frac{x' + x'' + x'''}{3} = \frac{p}{3} + 2 . \frac{r - p}{r} \cdot \frac{d}{3} = x_{,};$$

$$\frac{'y+''y+'''y}{3} = \frac{q}{3}+2.\frac{r-q}{r}\cdot\frac{d}{3} = {}_{,}y,$$

$$\frac{'x+''x+'''x}{3} = \frac{p}{3}+2.\frac{p-r}{r}\cdot\frac{d}{3} = {}_{,}x;$$

unde sequitur

$$\frac{{}_{,}y+y_{,}}{2} = \frac{q}{3}; \quad \frac{{}_{,}x+x_{,}}{2} = \frac{p}{3};$$

h. e. centra gravitatis triangulorum $S'S''S'''$ et $'S''S'''S$ cum gravitatis centro trianguli primarii in eadem recta posita sunt et ab hoc aequidistant.

§. 66.

Sit (fig. 16.) $AF=BF$, $BD=CD$, $CE=AE$; sit porro $BH=n.BE$, $CI=2n.CF$, $AK=3n.AD$; jam quaeramus coordinatas, quae ad centrum gravitatis pertinent trianguli $HIK$, quod per $S'$ significare volumus. Habemus

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{nq}{2} \\ x' &= \frac{np}{2} \end{aligned}\right\} \text{c. H}; \quad \left.\begin{aligned} y'' &= nq \\ x'' &= (1-n2)p \end{aligned}\right\} \text{c. I}; \quad \left.\begin{aligned} y''' &= (1-3n)q \\ x''' &= \tfrac{3}{2}np \end{aligned}\right\} \text{c. K};$$

ergo

$$\left.\begin{aligned} \frac{y'+y''+y'''}{3} &= \frac{2-3n}{6}q = y_{,} \\ \frac{x'+x''+x'''}{3} &= \frac{\frac{1+3}{2}np+(1-2n)p}{3} = \frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } S'.$$

Sit deinde $AH'=n.AD$, $BI'=2n.BE$, $CK'=3n.CF$, habebimus,

$$\left.\begin{aligned} y' &= (1-n)q \\ x' &= \frac{np}{2} \end{aligned}\right\} \text{c. H}'; \quad \left.\begin{aligned} y'' &= nq \\ x'' &= np \end{aligned}\right\} \text{c. I}'; \quad \left.\begin{aligned} y''' &= \frac{3nq}{2} \\ x''' &= (1-3n)p \end{aligned}\right\} \text{c. K}';$$

ergo, si $S''$ gravitatis centrum trianguli $H'I'K'$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y'+y''+y'''}{3} &= \frac{2+3n}{6}q \\ \frac{x'+x''+x'''}{3} &= \frac{2-3n}{6}p \end{aligned}\right\} \text{c. } S''$$

Sit denique $CH' = n . CF$, $AI'' = 2n . AD$, $BK'' = 3n . BE$, habebimus

$$\left.\begin{matrix} y' = \frac{nq}{2} \\ x' = (1-n)\,p \end{matrix}\right\} \text{c. H}''; \quad \left.\begin{matrix} y'' = (1-2n)\,q \\ x'' = np \end{matrix}\right\} \text{c. I}''; \quad \left.\begin{matrix} y''' = \frac{3n}{2}\,p \\ x''' = \frac{3n}{2}\,q \end{matrix}\right\} \text{c. K};$$

ergo, si $S'''$ gravitatis centrum trianguli $H''I''K''$,

$$\left.\begin{matrix} \frac{y' + y'' + y'''}{3} = \frac{q}{3} = y, \\ \frac{x' + x'' + x'''}{3} = \frac{2+2n}{6}\,p = x, \end{matrix}\right\} \text{c. } S'''$$

Ex his videmus, 1) punctum $S'$ cum gravitatis centro trianguli primarii jacere in recta lateri $AB$ parallela, 2) punctum $S'''$ cum gravitatis centro trianguli primarii in recta jacere lateri $BC$ parallela. Inde vero facile colligitur, punctum $S''$ cum gravitatis centro trianguli primarii in recta positum esse lateri $AC$ parallela. Recte igitur habet haec propositio: Si linearum transversarum, quae latera trianguli cujusdam $ABC$ (Fig. 16.) in duas partes auquales dividunt, inde ab angulorum verticibus ejusmodi partes desecantur, ut $CH = n . BE$, $CI = 2n . CF$, $AK = 3n . AD$; $AH' = n . AD$; $AI' = 2n . BE$, $CK' = 3n . CF$; $CH'' = n . CF$, $AI'' = 2n . AD$, $BK'' = 3n . BE$; et fines linearum, quae ad eandem desecandi rationem pertinent, rectis junguntur, tria efficiuntur triangula, quorum gravitatis centra ita comparata sunt, ut quae lineae haec singula jungant cum centro gravitatis trianguli primarii singulis trianguli lateribus sint parallelae.

Est aequatio rectae $S'S''$

$$\frac{p}{2}\,y + qx = \frac{2-n}{4}\,pq;$$

rectae $S''S'''$

$$py + \frac{q}{2}\,x = \frac{2+n}{4}\,pq;$$

rectae $AD$

$$\frac{p}{2}y + qx = \frac{pq}{2},$$

rectae $CF$

$$py + \frac{q}{2}x = \frac{pq}{2};$$

ergo $S' S'' \parallel AD$, $S'' S''' \parallel CF$; eodem modo demonstrari potest $S' S''' \parallel CF$. Rectae igitur, quae bina gravitatis centra triangulorum $HIK$, $H'I'K'$ et $H''I''K''$ jungunt, transversis $AD$, $BE$, $CF$ sunt parallelae.

Triangulo $S'S''S'''$ idem est centrum gravitatis, quod triangulo primario.

$$\Delta S'S''S''' = \left[\frac{2+3n}{6}p.nq + \frac{2-3n}{6}p.-\frac{nq}{2} + \frac{p}{3}.-\frac{nq}{2}\right].\tfrac{1}{2}\sin\beta$$

$$= \frac{18n^2pq + 9n^2pq}{36}.\tfrac{1}{2}\sin\beta = \tfrac{3}{4}n^2\,\Delta.$$

## §. 67.

Si eadem ratione eodemque ordine lineas desecamus in transversis productis, ita ut primum a puncto $B$ desecare incipiamus, deinde ad punctum $A$ et ab hoc denique ad $C$ transeamus; si porro puncta, quae punctis $H$, $I$, $K$ in nostra figura respondent, per $MNO$ significamus, gravitatis centra triangulorum $MNO$, $M'N'O'$ et $M''N''O''$ per $'S$, $''S$, $'''S$, habemus

$$\left.\begin{array}{l} {}_1x = \frac{p}{3} \\ {}_1y = \frac{2+3n}{3}q \end{array}\right\} \text{c. } 'S; \quad \left.\begin{array}{l} {}_2x = \frac{2+3n}{6}p \\ {}_2y = \frac{2-3n}{6}q \end{array}\right\} \text{c. } ''S; \quad \begin{array}{l} {}_3x = \frac{2-3n}{6}p \\ {}_3y = \frac{q}{3} \end{array} \quad \text{c. } '''S;$$

ergo

$$\frac{{}_1x + x_1}{2} = \frac{{}_2x + x_2}{2} = \frac{{}_3x + x_3}{2} = \frac{p}{3}$$

$$\frac{{}_1y + y_1}{3} = \frac{{}_2y + y_2}{2} = \frac{{}_3y + y_3}{2} = \frac{p}{3};$$

h. e. lineae, quae puncta $S'$ et $'S$, $S''$ et $''S$, $S'''$ et $'''S$ jungunt, gravitatis centrum trianguli primarii transeunt et hoc puncto in duas partes aequales secantur.

Facile ex iis, quae modo dicta sunt, colligitur, figuras quadrilateras $'S''S\,S'S''$, $'S'''S\,S'S''$, $''S'''S\,S''S'''$, esse parallelogramma, quibus idem gravitatis centrum, quod triangulis $S'S''S'''$ et $'S''S'''S$ simulque triangulo primario.

§. 68.

Jam videamus de areis singularum, quae hoc loco reperiuntur, figurarum.

Est vero

$$\triangle\, 'S''S'''S = \triangle\, S'S''S''' = \tfrac{3}{4} n^2 \triangle.$$

Porro

$$'S''S\,S'S'' = \quad '''S'S\,S'''S' = \quad '''S''S\,S'''S''$$
$$= \left(\frac{6np}{6} \cdot \frac{6nq}{6}\right) . \tfrac{1}{2} \sin\beta = n^2 \triangle.$$

Si sexangulum $S'''\,'S\,S''\,'''S\,S'\,''S$ per $P$ significamus, habemus

$$P = \tfrac{1}{2} \sin\beta \left(\frac{2+3n}{6} p - \frac{2-3n}{6} p\right) . \frac{9n}{6} q$$
$$= \tfrac{9}{2} n^2 . \tfrac{1}{2} \sin\beta\, pq = \tfrac{9}{2} n^2 \triangle,$$

unde sequitur

$$\triangle\, S'S''S''' = \triangle\, 'S''S'''S = \tfrac{1}{6} P$$

Si porro illa parallelogramma aequalia per $\square$ significamus, habemus

$$P = \tfrac{9}{2} n^2 \triangle = 3 . \tfrac{3}{2} \square = 3 \triangle\, S'S'''\,'S;$$

h. e. quodque triangulum, cujus angulorum vertices illa gravitatis centra $S'$ $S''$ etc. exhibent et cujus latera ita comparata sunt, ut unum ex iis gravitatis centrum trianguli primarii transeat est $= \tfrac{1}{3} P$:

Porro

$$\triangle\, S'\,'''S\,S'' = \triangle\, 'S''S\,S''' = \triangle\, 'S\,S''S''' = \triangle\, '''S\,''S\,S'$$
$$= \tfrac{1}{2} \triangle\, S'S'''\,'S = \tfrac{1}{3} \square = \tfrac{1}{6} P.$$

§. 69.

Est aequatio rectae $S'S'$

$$x = \frac{p}{3},$$

aequatio rectae $''S\,S'''$

$$x = \frac{2+3n}{6}\,p,$$

aequatio rectae $'''S\,S''$

$$x = \frac{2-3n}{6}\,p;$$

ergo $'S\,S' \parallel ''S\,S''' \parallel '''S\,S''$; eodem modo demonstrari potest $''S\,S' \parallel 'S\,S''' \parallel '''S\,S'$ et $'''S\,S''' \parallel 'S\,S'' \parallel ''S\,S'$.

Porro est aequatio rectae $'S\,S'''$

$$py + qx = \frac{4+3n}{6}\,pq.$$

Habebimus rectam, in qua $'''S\,S''$ et $'S\,S'''$ sese secant, si aequationem rectae $'''S\,S''$ per $q$ multiplicatam posteriori addiderimus; haec vero aequatio erit

$$px + 2qx = pq \text{ sive } \frac{p}{2}y + qx = \frac{p}{2}q,$$

quae haud dubie rectam $AD$ exhibet; ergo $'''S\,S''$ et $'S\,S'''$ in recta $AD$ sese secant.

Eodem modo demonstrari potest, rectas $''S\,S'$ et $'''S\,S''$ sese secare in recta $BE$, $''S\,S'$ et $'S\,S'''$ in $CF$; deinde $''S\,S'''$ et $'''S\,S'$ in $AD$, $'''S\,S'$ et $'S\,S''$ in $CF$, $'S\,S''$ et $''S\,S'''$ in $BE$. Hoc modo efficiuntur duo triangula $\alpha\beta\gamma$ et $\varepsilon\zeta\vartheta$, quae idem habent gravitatis centrum, quod est triangulo primario, et quorum utrumvis triplum est trianguli $S'S''S'''$. Jam de altero triangulorum quod contendimus demonstrasse sufficiat. Habemus

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2-6n}{6}\,p \\ y' &= \frac{2+3n}{6}\,q \end{aligned}\right\}\text{c. }\alpha; \quad \left.\begin{aligned} x'' &= \frac{2+3n}{6}\,p \\ y'' &= \frac{2-6n}{6}\,q \end{aligned}\right\}\text{c. }\beta; \quad \left.\begin{aligned} x''' &= \frac{2+3n}{6}\,p \\ y''' &= \frac{2+3n}{6}\,q \end{aligned}\right\}\text{c. }\gamma;$$

ergo

$$\frac{x'+x''+x'''}{3} = \frac{p}{3};\ \frac{y'+y''+y'''}{3} = \frac{q}{3}.$$

$$\Delta\,\alpha\beta\gamma = \left[\frac{2-6n}{6}\,p\,.-\frac{9n}{6}\,q + \frac{2+3n}{6}\,p\,\frac{9n}{6}\,q\right].\tfrac{1}{2}\sin\beta.$$

$$= \tfrac{81}{36}\,n^2\,\Delta = 3.\tfrac{3}{4}\,n^2\,\Delta = 3\,\Delta\,S'S''S'''.$$

§. 70.

Habemus porro

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{2-3n}{6}q \\ x' &= \frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \text{c. } S'; \quad \left.\begin{aligned} y''. &= \frac{q}{3} \\ x'' &= \frac{2-3n}{6}p \end{aligned}\right\} \text{c. } {}'''S.$$

$$\left.\begin{aligned} y''' &= \frac{2+3n}{6}q \\ x''' &= \frac{2-6n}{6}p \end{aligned}\right\} \text{c. } \alpha; \quad \left.\begin{aligned} y^{\text{IV}} &= \frac{2-6n}{6}q \\ x^{\text{IV}} &= \frac{2+3n}{6}p \end{aligned}\right\} \text{c. } \beta;$$

ergo
$$\frac{x'+x''}{2} = \frac{2-3n}{6}p = x'',$$

$$\frac{y'+y''}{2} = \frac{1}{3}q = y'';$$

$$\frac{x''+x^{\text{IV}}}{2} = \frac{p}{3} = x'; \; \frac{y''+y^{\text{IV}}}{2} = \frac{2-3n}{6}q = y'$$

h. c. recta $\alpha\beta$ punctis $S'$ et $'''S$ in tres aequales partes dividitur. Eodem modo demonstrari potest, rectam $\alpha\gamma$ in punctis $S''$ et $'S$ in tres partes aequales esse divisam, $\gamma\beta$ in punctis $S'''$ et $''S$, $\vartheta\varepsilon$ in punctis $S'$ et $''S$, $\varepsilon\zeta$ in punctis $S'''$ et $'S$, $\zeta\vartheta$ in punctis $S''$ et $'''S$. Latera igitur triangulorum $\alpha\beta\gamma$, $\vartheta\varepsilon\zeta$ ita sibi incidunt, ut vicissim sese in tres aequales partes dividant.

Satis deinde apparet, rectas $G\alpha$, $G\beta$, $G\gamma$, $G\varepsilon$, $G\zeta$, $G\vartheta$, rectis $\vartheta\zeta$, $\vartheta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ dividi in duas partes aequales; h. c. superiores transversarum partes alterius trianguli $\alpha\beta\gamma$ per latera alterius $\vartheta\varepsilon\zeta$ in duas partes aequales dividuntur, et vice versa.

Si denique transversarum $BE$, $CE$, $AD$ $n$plum, $2n$plum, $3n$plum triplici quidem modo, sed inde a punctis $E, F, D$, desecamus, singularum partium fines nobis exhibent angulorum vertices trium triangulorum, quibus eadem sunt gravitatis centra, quae vidimus in triangulis $MNO$, $M'N'O'$ et $M''N''O''$. Quod quidem satis facile demonstrari potest.

## §. 71.

Si perpendiculorum, a puncto quopiam $D$, intra triangulum $ABC$ (fig. 17.) sito, in ejus latera demissorum, tria quaelibet puncta $a$, $b$, $c$ rectis junguntur, et deinde in latera trianguli hoc modo effecti $abc$ ab angulorum verticibus trianguli $ABC$ demittuntur perpendicula, haec ipsa in eodem puncto $d$ sese secant.

Sit punctum, in quo $BC$ et $Da$ sibi incidunt, initium coordinatarum; $BC$ sit axis primus, $Da$ axis secundus. Sint porro

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}\text{c. A}; \quad \left.\begin{matrix} -x_2 \\ o \end{matrix}\right\}\text{c. B}; \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ o \end{matrix}\right\}\text{c. C}; \quad \left.\begin{matrix} o \\ y_4 \end{matrix}\right\}\text{c. D}; \quad \left.\begin{matrix} x_5 \\ y_5 \end{matrix}\right\}\text{c. d}; \quad \left.\begin{matrix} o \\ y_6 \end{matrix}\right\}\text{c. a}.$$

Habebimus igitur aequationes rectarum $Da$, $Dc$, $Db$ et $dA$, $dB$, $dC$, quas per 1) 2) 3) 4) 5) 6) significare volumus,

$$1)\ x = o; \quad 2)\ y - y_4 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1}x; \quad 3)\ y - y_4 = -\frac{x_1 - x_3}{y_1}x$$

$$4)\ y = \frac{y_1 - y_5}{x_1 - x_5}x + C; \quad 5)\ y = \frac{y_5}{x_2 + x_5} + C; \quad 6)\ y = -\frac{y_5}{x_3 - x_5} + C;$$

porro aequationes perpendiculorum, a puncto $a$ in $dC$ et $dB$ demissorum, quae sunt $ab$ et $ac$

$$y - y_6 = \frac{x_5 - x_3}{y_5}x; \quad y - y_6 = -\frac{x_2 + x_5}{y_5}x.$$

Ex his aequationibus inveniuntur

$$\left.\begin{aligned} {}_1x &= \frac{(y_4 - y_6)\, y_5 y_1}{y_5(x_1 - x_3) + (x_3 - x_5)\, y_1} \\ {}_1y &= \frac{y_6 y_5 (x_1 - x_3) + (x_3 - x_5)\, y_4 y_1}{y_5 (x_1 - x_3) + (x_2 - x_6)\, y_1} \end{aligned}\right\}\text{c. b};$$

$$\left.\begin{aligned} {}_2x &= \frac{(y_4 - y_6)\, y_5 y_1}{y_5(x_1 + x_2) - (x_2 + x_5)\, y_1} \\ {}_2y &= \frac{y_6 y_5 (x_1 + x_2) - (x_2 + x_5)\, y_4 y_1}{y_5 (x_1 + x_2) - (x_2 + x_5)\, y_1} \end{aligned}\right\}\text{c. c};$$

ergo recta $bc$

$$\left(\frac{(y_4 - y_6)\, y_5 y_1}{y_5(x_1 + x_2) - (x_2 + x_5)\, y_1} - \frac{(y_4 - y_6)\, y_4 y_1}{y_5(x_1 - x_3) + (x_3 - x_5)\, y_1}\right) y =$$

$$\left(\frac{y_4 y_5 (x_1 + x_2) - (x_2 + x_5)\, y_4 y_1}{y_5 (x_1 + x_3) - (x_2 + x_5)\, y_1} - \frac{y_6 y_5 (x_1 - x_3) + (x_3 - x_5)\, y_4 y_1}{y_3 (x_1 - x_3) + (x_3 - x_5)\, y_1}\right) x + C;$$

sive

$$(y_1-y_3).(x_3+x_2).(y_4-y_0)y_3y_2\ y = (x_3-x_2).(x_3+x_2).(y_4-y_0)y_3y_2\ x + C;$$

ergo

$$y = \frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}x + C,$$

$$y = -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}x + C,$$

quam quidem aequationem si cum 4) comparamus, rectam $bc$ ad perpendiculum normatam insistere rectae $Ad$ videmus. Inde vero quod contendimus verum esse patet.

Jam si alia tria puncta $a'$, $b'$, $c'$, in iisdem perpendiculis $Da$, $Db$ et $Dc$ posita, rectis $a'b'$, $a'c'$ et $b'c'$ junguntur, et perpendicula, a punctis $A$, $B$, $C$, in rectas $a'b'$, $a'c'$ et $b'c'$ demissa, sibi incidunt in puncto $d'$: puncta, in quibus latera $ab$ et $a'b'$, $ac$ et $a'c'$, $bc$ et $b'c'$, satis producta sibi incidunt, in eadem jacent recta, cui producta recta $dd'$ ad perpendiculum normata insistit.

Ponamus enim $\left.\begin{matrix}x_7\\y_7\end{matrix}\right)$ c. $d'$; $\left.\begin{matrix}0\\y_8\end{matrix}\right)$ c. $a'$, ex aequationibus rectarum $ab$ et $ac$ facile negotio inveniemus aequationes rectarum $a'b'$ et $a'c'$, ita quidem ut pro $x_5$, $y_5$, ponamus $x_7$, $y_7$ et pro $y_6$, $y_8$.

Est vero ab

$$y_5 y = (x_3 - x_5)x + y_5 y_6,$$

$ac$

$$y_5 y = -(x_2 + x_5)x + y_5 y_6;$$

ergo $a'b'$

$$y_7 y = (x_3 - x_7)x + y_7 y_8,$$

$a'c'$

$$y_7 y = -(x_2 + x_7)x + y_7 y_8;$$

ergo recta, in qua $ab$ et $a'b'$ sese secant

$$(y_5 - y_7)y = (x_7 - x_5)x + y_5 y_6 - y_7 y_8$$

sive

$$y = -\frac{x_5 - x_7}{y_5 - y_7}x + \frac{y_5 y_6 - y_7 \cdot y_8}{y_5 - y_7};$$

recta vero, in qua $ac$ et $a'c'$ sibi incidunt,

$$y = -\frac{x_5 - x_7}{y_6 - y_7} x + \frac{y_5 y_6 - y_7 y_8}{y_6 - y_7},$$

unde patet, $ab$ et $a'b'$, $ac$ et $a'c'$ in eadem recta $\alpha\beta$ sibi incidere. Eodem modo ostendi potest, $bc$ et $b'c'$ in recta $\alpha\beta$ sibi incidere. Quum vero aequatio rectae $dd'$ sit

$$y = \frac{y_6 - y_7}{x_5 - x_7} x + C,$$

quod diximus recte habere perspicitur *).

§. 72.

Si latus $AB$ trianguli cujuspiam $ABC$ (Fig. 18.) in puncto $D$ ita dividitur, ut $AD:DB = n:m$, habemus, si coordinatas puncti $D$ per $xy$, puncti $A$ per $x_1\ y_1$, puncti $B$ per $x_2\ y_2$ significamus

$$mx_1 + nx_2 = (m+n)\ x;\ my_1 + ny_2 = (m+n)\ y.$$

Jam si ducimus $CD$, et hanc rectam ita dividimus ut $CE:ED = m+n:r$, habemus, si coordinatas punctorum $C$ et $E$ per $x_3\ y_3$ et $x_4\ y_4$ significamus

$$(m+n)\,x + r\,x_3 = (m+n+r)\,x_4;$$
$$(m+n)\,y + ry_3 = (m+n+r)\,y_4;$$

et quia $(m+n)\ x = mx_1 + nx_2$ et $(m+n)\,y = my_1 + ny_2$

$$mx_1 + nx_2 + rx_3 = (m+n+r)\ x_4,$$
$$my_1 + ny_2 + ry = (m+n+r)\ y_4.$$

Jam ducamus a puncto $E$ rectas $EA$, $EB$, erit

$$\triangle\ BEC : \triangle\ AEC : \triangle\ AEB = m:n:r.$$

Ponamus enim $BC$ et $BA$ esse coordinatarum axes, erit

$$\triangle\ ABC = x_3\ .\ y_1\ .\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$
$$\triangle\ BEC = x_3\ y_4\ .\ \tfrac{1}{2}\sin\beta$$

ergo $\triangle\ ABC : \triangle\ BEC = y_1 : y_4;$

*) Propositionem, quam in hac paragrapho tractavimus, demonstrandam proposuit J. Steiner in libro „Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle" Tom. II. pag. 287.

quum vero $y_2 = y_3 = o$, habemus $y_1 = \frac{m y_1}{m + n + r}$, proinde

$$\triangle\ ABC : \triangle\ BEC = 1 : \frac{m}{m + n + r}.$$

Si $AB$ et $AC$ coordinatarum axes esse ponimus, invenimus

$$\triangle\ ABC : \triangle\ AEB = 1 : \frac{r}{m + n + r};$$

eodem modo invenitur

$$\triangle\ ABC : \triangle\ AEC = 1 : \frac{n}{m + n + r};$$

unde sequitur

$$\triangle\ BEC : \triangle\ AEC : \triangle\ AEB = m : n : r.$$

Ex his patet, quomodo solvi possit problema, ex quo postulatur, ut in triangulo quodam inveniatur punctum, quod ita comparatum sit, ut rectae, quae ab hoc ad angulorum vertices ducantur, triangulum datum dividant in tres partes, quae inter se certam rationem habeant. cf. Annales de Mathématiques etc. par Gergonne Tom VII, p. 344.

## §. 73.

Si duorum laterum coordinatorum *) quadrilateri cujusdam inde ab utroque fine eaedem partes proportionales desecantur et fines ejusmodi partium, quae ad tertium quadrilateri latus eundem habent situm, rectis junguntur: singula rectarum paria, quae ad singulas divisiones pertinent, in eadem recta sibi incidunt.

Si enim (Fig. 19.)

$$Ae : eD = Da : aA = Bc : cC = Cg : gB = r : (1 - r) = r : s,$$
$$Ax : xD = Db : bA = Bd : dC = Ch : hB = t : (1 - t) = t : u,$$

rectae $ac$ et $ge$, $bd$ et $fh$ in eadem recta sibi incidunt.

*) In quoque quadrilatero $ABCD$ et latera ex adverso posita $AB$ et $CD$, $AD$ et $CB$, et lineas diagonales nominamus latera coordinata.

Sit punctum $G$, in quo producta latera $AB$ et $CD$ sese secant, initium coordinatarum; pars axis primi $GA = p$, $GB = p'$; pars axis secundi $GD = q$, $GC = q'$. Habebimus

$$\left.\begin{matrix} rp \\ sq \end{matrix}\right\}\text{c. a};\quad \left.\begin{matrix} sp' \\ rq' \end{matrix}\right\}\text{c. c};\quad \left.\begin{matrix} sp \\ rq \end{matrix}\right\}\text{c. e};\quad \left.\begin{matrix} rp' \\ sq' \end{matrix}\right\}\text{c. g};\quad \left.\begin{matrix} tp \\ uq \end{matrix}\right\}\text{c. b};$$

$$\left.\begin{matrix} up' \\ tq' \end{matrix}\right\}\text{c. d};\quad \left.\begin{matrix} up \\ tq \end{matrix}\right\}\text{c. f};\quad \left.\begin{matrix} tp' \\ uq' \end{matrix}\right\}\text{c. h};$$

ergo recta $ac$

$$(sp'-rp)\,\mathrm{y} - (rq'-sq)\,\mathrm{x} = s^2p'q - r^2pq';$$

$ge$

$$(rp'-sp)\,\mathrm{y} - (sq'-rq)\,\mathrm{x} = r^2p'q - s^2pq',$$

$bd$

$$(up'-tp)\,\mathrm{y} - (tq'-uq)\,\mathrm{x} = u^2p'q - t^2pq',$$

$fh$

$$(tp'-up)\,\mathrm{y} - (uq'-tq)\,\mathrm{x} = t^2p'q - u^2pq':$$

inde invenimus rectam, in qua $ac$ et $ge$ sibi incidunt,

$$(s-r)\,(p'+p)\,\mathrm{y} + (s-r)\,(q'+q)\,\mathrm{x} = (p'q+pq')\,(s^2-r^2)$$

sive

$$(p'+p)\,\mathrm{y} + (q'+q) = (p'q-pq')\,(s+r)$$

rectam vero: in qua $bd$ et $hf$ sese secant,

$$(p'+p)\,\mathrm{y} + (q'+q)\,\mathrm{x} = (p'q+pq')\,(u+t),$$

quum vero sit $(s+r) = (u+t) = 1$, videmus rectas $ac$ et $ge$, $bd$ et $ht$ in eadem recta sibi incidere, cujus aequatio

$$(p'+p)\,\mathrm{y} + (q'+q)\,\mathrm{x} = p'q+pq'. \quad \text{(I)}$$

Ex ipsa, qua usi sumus, demonstrandi ratione facile perspicitur, quod de rectis $ac$ et $ge$, $bd$ et $hf$ valeat, idem valere de omnibus ejusmodi rectis.

§. 74.

Si porro

$$CO:OD = DS:SC = AQ:QB = BU:UA = \alpha:(1-\alpha) = \alpha:\beta,$$
$$CP:PD = DT:TC = AR:RB = BV:VA = \gamma:(1-\gamma) = \gamma:\varepsilon,$$

rectae $OQ$ et $SU$, $PR$ et $TV$ in eadem recta sese secant.

Si denique

$$Ai:iC = Cl:lA = Bn:nD = Dp:pB = \lambda:(1-\lambda) = \lambda:\mu,$$
$$Ak:kC = Cm:mA = Bo:oD = Dq:qB = \nu:(1-\nu) = \nu:\varrho,$$

primum rectae $nl$ et $ip$, $om$ et $kq$ in eadem recta sibi incidunt, deinde etiam $lp$ et $ni$, $mq$ et $ko$ in eadem recta sese secant.

Jam quaeramus aequationes rectarum, in quibus illa rectarum paria sibi incidunt. Inveniri possunt ex aequationibus rectarum $OQ$ et $SU$, $pi$ et $nl$, $pl$ et $ni$.

Est vero recta $OQ$:

$$(\alpha p' + \beta p - o)y - (o - \alpha q - \beta q')x = (\alpha p' + \beta p)\cdot(\alpha q + \beta q'),$$

$SU$

$$(\alpha p + \beta p' - o)y - (o - \beta q - \alpha q')x = (\alpha p + \beta p')\cdot(\beta q + \alpha q'),$$

$pi$

$$(\lambda p' - \mu p)y - (\mu q - \lambda q')x = \lambda^2 p'q' - \mu^2 pq,$$

$nl$

$$(\mu p' - \lambda p)y - (\lambda q - \mu q')x = \mu^2 p'q' - \lambda^2 pq,$$

$pl$

$$\lambda(p' - p)y - \mu(q - q')x = \lambda\mu(p'q' - pq),$$

$ni$

$$\mu(p' - p)y - \lambda(q - q')x = \lambda\mu(p'q' - pq);$$

inde invenitur recta, in qua $OQ$ et $SU$, $PR$ et $TV$ sibi incidunt,

$$(p' - p)y - (q' - q)x = p'q - pq' \quad \text{(II)}$$

recta, in qua $pi$ et $nl$, $kq$ et $om$ sese secant,

$$(p' + p)y + (q' + q)x = p'q' + pq \quad \text{(III)}$$

recta denique, in qua $ni$ et $lp$, $ok$ et $mq$ sibi incidunt,

$$(p' - p)y = (q' - q)x \quad \text{(IV)}$$

§. 74.

Jam videamus de natura linearum, quas aequationes (I) (II) (III) (IV) exhibent.

Primum recte poni potest, aequationem (I) ex his duabus aequationibus

$$p'y + qx = p'q \quad (\mathfrak{A})$$
$$py + q'x = pq' \quad (\mathfrak{B})$$

ita ortam esse, ut (§. 30.) jure concludamus ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$) esse lineas, quae in (I) sibi incidunt. Est vero ($\mathfrak{A}$) (§. 18.) aequatio rectae $BD$, ($\mathfrak{B}$) aequatio rectae $AC$; ergo recta, cujus aequatio est (I), punctum transit in quo lineae diagonales sese secant.

Facile intelligitur rectam quoque, quam aequatio (II) exhibet punctum transire, in quo diagonales sibi incidunt.

Porro recte ponitur, aequationem (III) ortam esse ex his aequationibus

$$py + qx = pq \quad (\mathfrak{C})$$
$$p'y + q'x = p'q' \quad (\mathfrak{D})$$

cum altera alteri sit addita. Videmus autem ($\mathfrak{C}$) esse aequationem rectae $AD$, ($\mathfrak{D}$) vero rectae $BC$, ergo recta, cujus aequatio est (III), punctum transit in quo rectae $AD$ et $BC$ sese secant, i. e. punctum $F$.

E forma aequationis (IV) jam patet, rectam hac aequatione exhibitam initium coordinatarum transire. Jam ex his intelligitur, rectas, quarum aequationes (I), (II), (III), (IV), puncta transire, in quibus coordinata nostri quadrilateri latera sibi incidunt, ita quidem ut quaeque punctum transeat, in quo illa latera coordinata sibi incidunt, inde a quibus partes illae proportionales desecantur. Jam si conferamus aequationes (I), (II), (III), (IV), videbimus, rectam (I) parallelam esse rectae (III) et rectam (II) parallelam esse rectae (IV).

§. 75.

Sit recta (I) $HI$, (II) $KF$, (III) $LM$, (IV) $NG$. Si quaeramus coordinatas punctorum $L$ et $M$ habebimus

$$\left.\begin{aligned} x' &= p' \frac{(q'-q)p'}{(q'-q)p'+(p'-p)q'} \\ y' &= q' \frac{(p'-p)q'}{(q'-q)p'+(p'-p)q'} \end{aligned}\right\} \text{c. } L; \qquad \left.\begin{aligned} x'' &= p' \frac{(p'-p)q'}{(q'-q)p'+(p'-p)q'} \\ y'' &= q' \frac{(q'-q)p'}{(q'-q)p'+(p'-p)q'} \end{aligned}\right\} \text{c. } M;$$

unde apparet

$$CL : BL = BN : NC$$

et quia $CL + BL = BN + NC$, erit

$$CL = BN, \; BL = NC.$$

Eodem modo demonstrari potest, esse $Ct = Ds$, $Du = A\varphi$, $AH = BK$, $C\alpha = A\varepsilon$, $B\gamma = D\beta$; h. e. binae rectarum (I) (II) (III) (IV), quae idem latus quadrilateri secant, idem latus eodem modo dividunt.

Habemus porro

$$\left.\begin{aligned} x' &= -p \frac{(q'-q)p}{p'q-pq'} \\ y' &= \phantom{-}q \frac{(p'-p)q}{p'q-pq'} \end{aligned}\right\} \text{c. } I; \qquad \left.\begin{aligned} x'' &= p \frac{(q'-q)p}{p'q-pq'} \\ y'' &= q \frac{(p'-p)q}{p'q-pq'} \end{aligned}\right\} \text{c. } u;$$

unde sequitur

$$ID : IA = Du : uA;$$

h. e. recta $AI$ in punctis $D$ et $u$ harmonice divisa est. Ergo lineae diagonales et lineae $HI$ et $LM$ sunt harmonicales.

Quia autem $HI \parallel KF$, $LM \parallel GN$, erit

$$\frac{\beta\zeta \cdot \beta\alpha}{2\beta\zeta - \beta\alpha} = \infty; \; \frac{\gamma\vartheta \cdot \gamma\varepsilon}{2\gamma\vartheta - \gamma\varepsilon} = \infty;$$

unde efficitur

$$2\beta\zeta - \beta\alpha = o; \; 2\gamma\vartheta - \gamma\varepsilon = o$$

sive

$$\beta\zeta = \tfrac{1}{2}\beta\alpha; \; \gamma\vartheta = \tfrac{1}{2}\gamma\varepsilon;$$

h. e. eas partes rectarum $KF$ et $CN$, quae inter lineas diagonales jacent, rectis $HI$ et $ML$ in duas aequales partes dividuntur.

De his hactenus. Priusquam autem huic libello finem faciamus, paucissimis de duplici problemate quod in libro saepius laudato, Annales de Mathematiques par Gergonne, propositum est, exponere liceat. Primum Tom VII, p. 344 hujus libri reperitur problema, ex quo postulatur, ut punctum intra triangulum

quoddam inveniatur, a quo rectae ad angulorum vertices ductae, triangulum in tres aequales partes dividant. Generatim hoc problema solvimus §. 72.

Deinde legitur Tom XXI, p. 22 illius libri problema, ex quo postulatur, ut duae rectae in triangulo ita ducantur, ut earum utravis centra gravitatis partium transeat, in quas altera triangulum dividat. E paragrapho quinquagesima quinta patet, illud problema facile ita solvi posse, ut ab anguli cujusdam vertice trianguli rectam ducamus ad punctum, quod latus subjectum in duas partes aequales dividat, et per gravitatis centrum trianguli dati aliam rectam, quae lateri, ad quod transversa est ducta, sit parallela —.

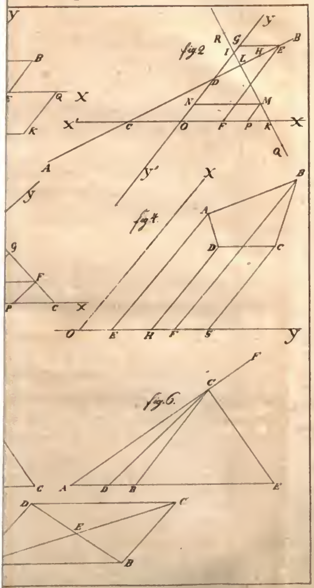
Scripsimus haec, cum munus sit nobis delatum, ut solemnia anniversaria indicamus, quibus ut huc usque consuevit, ita hoc quoque anno Kalendis, quae instant, Novembribus memoria instauratae scholae Portensis celebrabitur. Peragentur autem hoc ordine. Primum octava hora matutina magistri et alumni aedem sacram festa pompa adibunt, ut Deo Optimo Maximo ob beneficia, quae Porta, quamvis graviter hoc anno afflicta, tamen non pauca eaque non exigua in se collata experta est, gratias agant eumque implorent, ut proximo quoque anno nostram scholam vigere velit omnemque calamitatem benigne averruncet. Tum hora nona iidem in auditorio majori convenient, ut discipulos ex tribus inferioribus classibus evocatos aliena poemata, superiorum autem classium electos cives sua carmina et orationes recitantes audiant. Ex classe secunda superiori autem *Bernhardus de Rechenberg Liebenwerdanus, Arthur Lauhn Leucopetraeus, Bernhardus Goerne Uhrslebiensis, Eduardus Baltzer Hoheleinensis* carmina vernaculo sermone a se composita recitabunt; deinde *Carolus Fuerbringer Geranus* oratione latina tractabit Ovidianum illud ex pont. II. 9: Ingenuas didicisse fideliter artes, emollit mores.

Ex classe prima *Hermannus Bonitz Longosalissanus* oratione vernacula hoc argumentum tractabit: *Warum passt der Chor, wie wir ihn in der griechischen Tragödie finden, nicht für die moderne?* Deinde *Ernestus Poerner Oberthaviensis* carmine latino Lutheri laudes celebrabit. Denique

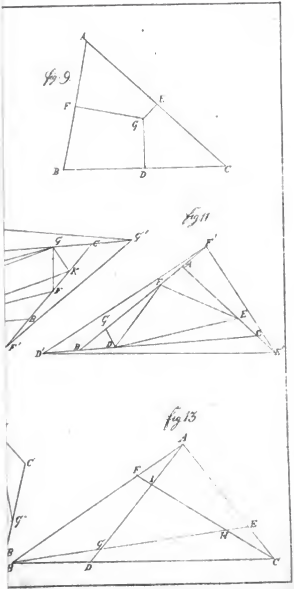
*Bruno Hildebrandt* exponere studebit: *Quae Friederici Sapientis, Saxonum electoris, ad artes et litteras excolendas sint merita.*

His recitatis, ex omnibus classibus discipuli, qui morum castitate discendique alacritate et assiduitate, in bonis artibus cum fructu posita, e praeceptorum sententia excelluerunt, evocabuntur, ut libros, quibus diligentiae virtutique honor habeatur, accipiant, precationibusque actum finiet is, qui rectoris vices nunc gerit. Quibus solemnibus ut intersint, qui rebus nostris favent, ea qua par est observantia rogatos velim.

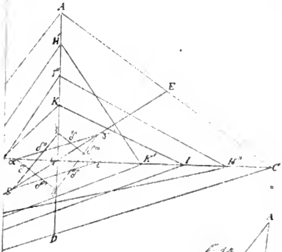
I



II



III



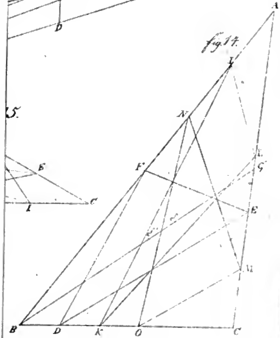




fig.14.

15.

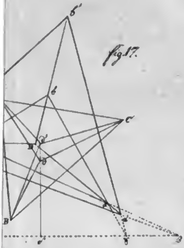


fig.17.

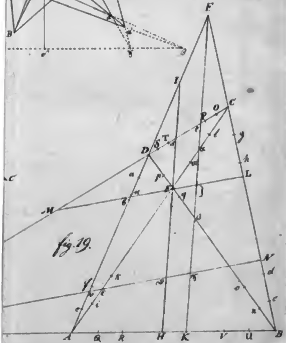



fig.19.